УДК 001.891.573:330.101.542 DOI: 10.46554/1993-0453-2021-1-195-88-94

ФАЗОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ В МОДЕЛЯХ РАЗДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДСТВ В МИКРОЭКОНОМИКЕ

© 2021 А.П. Черняев, И.В. Сухорукова, Г.П. Фомин, А.Ю. Меерсон*

Одной из важных и актуальных задач микроэкономики являются проблемы исследований экономической системы, в которых присутствуют ограничения, связанные с планируемым объемом выпуска продукции или величины производственной мощности предприятия. Эти ограничения задаются требованием, чтобы рассматриваемые траектории не покидали некоторой заданной области пространства существования управления. Чаще всего такие ограничения для всех моментов времени задают в виде неравенства, и накладываются определенные требования к функции фазовых координат объекта, их значению в заданный момент времени. Данная задача классифицируется как задача оптимального управления со смешанными и фазовыми ограничениями. В общем эта сфера представляет научный интерес и требует рассмотрения. В данном случае исследуется микроэкономическая модель экономики домашнего хозяйства, как наиболее устойчивого объекта в условиях кризисов. На накопленные сбережения накладывается естественное фазовое ограничение неотрицательности. Это привело к изучению особенностей микроэкономической формулировки проблемы поиска метода оптимального разделения материальных средств на потребляемую и накапливаемую части, поскольку наложением естественного фазового ограничения неотрицательности накопленных сбережений все значительно усложняется. Так же, как и в макроэкономике, оптимизируется потребление, но не в чистом виде, а максимизируется интегральная дисконтированная полезность потребления. Уравнение связи в настоящей работе отличается от аналогичного макроэкономического уравнения, поскольку домашнее хозяйство существует и выживает в кризисных условиях не так, как это делают социальные организмы и крупные предприятия. Именно поэтому в статье формулируются и доказываются достаточные условия для решения поставленной задачи с фазовым ограничением.

Ключевые слова: оптимальное потребление, накопленные сбережения, фазовое ограничение, индикаторная функция.

Основные положения:

- выполнена постановка и решение важной задачи оптимального разделения материальных средств на потребляемую и накапливаемую части в микроэкономике;
- предложен алгоритм построения оптимального управления микроэкономической системой.

Введение

В качестве основы рассматривается следующая концептуальная модель: цель–люди–информация–продукт–прибыль, где цель – это результат, на который направлены ресурсы, а управление – процесс целенаправленного наблюдения и воздействия на объект. Если чаще всего мы можем соблюдать основные аксиомы теории управления – формулировка цели, выделение ресурсов, обозначение критерия для выбора решения, то реализовать наблюдаемость далеко не всегда может быть

* Черняев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета). E-mail: chernyaev49@yandex.ru; Сухорукова Ирина Владимировна, доктор экономических наук, профессор кафедры высшей математики Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова, г. Москва. E-mail: suhorukovaira@yandex.ru; Фомин Геннадий Петрович, кандидат технических наук, профессор кафедры математических методов в экономике Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова, г. Москва. E-mail: gpfomin@mail.ru; Меерсон Алла Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов в экономике Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова, г. Москва. E-mail: allameerson@yandex.ru.

доступным и получается. В данной связи мы стараемся воспроизвести и компенсировать в какой-то степени один из важнейших принципов управления – наблюдаемость – и пополнить разнообразие и множество управленческих решений с помощью применения математических методов в известных экономических моделях, адекватных рассматриваемой ситуации.

Предшествующие наши исследовательские работы [1–2] были посвящены рассмотрению проблемы оптимального управления без дополнительных ограничений во всем пространстве управления. При рассмотрении данных задач с математической точки зрения полагали, что пространство управления не имеет изменений фазовой координаты $x(t)$. Естественно, всегда и везде существуют ограничения, к которым практически трудно адаптироваться, а вписаться в реальную жизнь крайне необходимо. Для разрешения указанных противоречий мы вынуждены формировать новую исследовательскую задачу оптимального управления микроэкономической системой, учитывающую наличие именно фазовых ограничений. В таком варианте будем считать, что моменты времени начальные t_0 и конечные t_1, а также начальное состояние x_0 фазовой траектории определенны и известны. С математической точки зрения, мы рассматриваем условия ограничений, накладываемых на все параметры оптимальной траектории. Причем считаем, что оптимальная фазовая траектория изначально существует и фиксирована, а ее границы не заступают на фазовое ограничение. Оптимальное управление в этом случае имеет рациональный подход к предъявленным требованиям. Формируются некоторые фазовые ограничения, обеспечивающие решение задачи и основанные на выполнении определенных достаточных условий [3–7]. Строится минимизирующая последовательность траекторий. При ее построении в качестве независимого аргумента берется собственно не само управление, а именно фазовая траектория. Это обстоятельство позволяет применить метод вариаций в фазовом пространстве. Использование метода вариаций позволяет учитывать фазовые ограничения, хотя при решении и возникают другие трудности [4–6, 8–12].

Методы

Следует заметить, что в условиях экономических кризисов домашние хозяйства демонстрируют стабильную выживаемость, которой могут позавидовать многочисленные предприятия. Аналогично постановке задачи оптимального разделения материальных средств на потребляемую и накапливаемую части [1, 2] максимизируется потребление, однако не в чистом виде. Как в [4–6, 8–12], максимизируется интегральная дисконтированная полезность потребления. В рассматриваемой математической модели экономики домашних хозяйств обыкновенное дифференциальное уравнение баланса, которое в задаче оптимального управления играет роль уравнения связи, имеет ярко выраженную микроэкономическую специфику [13–15]. Экономические характеристики, как известные, так и неизвестные, будем считать непрерывными функциями времени, используя вариационный метод решения.

Результаты

1. Балансовое тождество и уравнение связи. Мы будем исходить из основного балансового тождества [1, 2]

$$Y = C + I, \tag{1.1}$$

где Y –доход;

I – инвестиции;

C – потребление.

Положим теперь, что

$$Y = P + \rho x, \ I = x'_t, \tag{1.2}$$

где P – зарплаты и пенсии;

ρ – банковский процент по наличным деньгам;

x – накопленные сбережения;

t – время.

В таком случае, естественно, банковская система инвестирует накопленные сбережения домашнего хозяйства. Подставляя (1.2) в (1.1) мы получим

$$P + \rho x = C + x'_t$$

или

$$x'_t = P + \rho x - C. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) можно понимать и в другом балансовом смысле, отличном от (1.1), а именно: скорость приращения накопленных сбережений равна мгновенной разности прихода и расхода. Именно (1.3) и выступает как уравнение связи в задаче оптимального управления.

Для уравнения (1.3) формулируем задачу Коши для начального момента времени t_0:

$$x(t_0) = x_0 \geq 0. \qquad (1.4)$$

На накопленные сбережения накладываем фазовое ограничение неотрицательности

$$x \geq 0. \qquad (1.5)$$

2. Максимизация интегральной дисконтированной полезности потребления. В качестве штрафной функции возьмем интегральную дисконтированную полезность потребления

$$J(C) = \int_{t_0}^{t_1} u\big(C(t)\big)\, exp(-\delta\, t)\, d\, t. \qquad (2.1)$$

Здесь t_1 – конечный момент времени, u – функция полезности, δ – коэффициент дисконтирования, а (2.1) – функционал, который нужно максимизировать. Следуя [4–6, 8–12], считаем, что домашние хозяйства оценивают полезность потребления функцией $u(C)$, которая описывает постоянное отношение к риску по Эрроу–Пратту:

$$a = -\frac{u''(C)\,C}{u'(C)} > 0. \qquad (2.2)$$

Следуя [4–6], из (2.2) получаем

$$u'(C) = \frac{\gamma}{C^a} = \gamma C^{-a}. \qquad (2.3)$$

Выражение для самой функции потребления нам не понадобится.

Рассматривая приращение функционала (2.1): $J(C(t) + h(t)) - J(C(t))$, добавляем условие на правом конце

$$x(t_1) = x_1 \geq 0, \qquad (2.4)$$

и получаем существование максимума функционала (2.1), и справедливость уравнения Эйлера

$$u'(C(t))\rho(t)e^{-\delta t} + \frac{d}{dt}\big[u'(C(t))e^{-\delta t}\big] = 0. \; (2.5)$$

Проводим замену

$$w = u'(C(t))e^{-\delta t}, \qquad (2.6)$$

что упрощает уравнение Эйлера (2.5)

$$\frac{dw}{dt} + \rho(t)w = 0.$$

Причем последнее легко интегрируется

$$w = De^{-\int_{t_0}^{t}\rho(s)ds}, D = const. \qquad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) имеем

$$u'(C(t))e^{-\delta t} = De^{-\int_{t_0}^{t}\rho(s)ds}.$$

Выражая из последнего равенства производную функции полезности и сравнивая полученное с равенством (2.3), получаем

$$u'(C(t)) = De^{\delta t - \int_{t_0}^{t}\rho(s)ds} = \frac{\gamma}{[C(t)]^a}. \qquad (2.8)$$

Выражая потребление из (2.8), будем иметь

$$[C(t)]^a = \frac{\gamma}{D}e^{\delta t - \int_{t_0}^{t}\rho(s)ds},$$

$$C(t) = \left(\frac{\gamma}{D}\right)^{\frac{1}{a}} e^{\frac{\delta}{a}t - \frac{1}{a}\int_{t_0}^{t}\rho(s)ds}. \qquad (2.9)$$

3. Использование конечного условия. Уравнение (1.3) линейное и из [10] следует

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\rho(s)ds}\,[P(\tau) - C(\tau)]d\tau +$$
$$+ x_0 e^{\int_{t_0}^{t}\rho(s)ds}. \qquad (3.1)$$

Формула (3.1) дает решение задачи Коши (1.3), (1.4) и проверяется непосредственно. То, что (3.1) удовлетворяет (1.4) очевидно, а то, что (3.1) удовлетворяет уравнению (1.3), следует из формулы Лейбница [9]. Подставляя в (3.1) $t = t_1$ и используя (2.4), можно записать

$$x_1 = \int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\,[P(\tau) - C(\tau)]d\tau +$$
$$+ x_0 e^{\int_{t_0}^{t_1}\rho(s)ds}. \qquad (3.2)$$

Преобразуем теперь (3.2) таким образом:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\,C(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\,P(\tau)d\tau +$$
$$+ x_0 e^{\int_{t_0}^{t_1}\rho(s)ds} - x_1. \qquad (3.3)$$

Подставим правую формулу (2.9) в (3.3):

$$\left(\frac{\gamma}{D}\right)^{\frac{1}{a}} \int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\; e^{\frac{1}{a}\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds - \frac{\delta}{a}\tau} d\tau =$$
$$\int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\,P(\tau)d\tau + x_0 e^{\int_{t_0}^{t_1}\rho(s)ds} - x_1.$$

Возводя последнее в степень $a > 0$, будем иметь

$$\frac{\gamma}{D} = \left(\int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\,P(\tau)d\tau + x_0 e^{\int_{t_0}^{t_1}\rho(s)ds} - x_1\right)^a$$
$$\left(\int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\; e^{\frac{1}{a}\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds - \frac{\delta}{a}\tau} d\tau\right)^{-a}. \qquad (3.4)$$

Таким образом, из последнего равенства можно выразить искомую постоянную

$$D = \gamma\left(\int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\; e^{\frac{1}{a}\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds - \frac{\delta}{a}\tau} d\tau\right)$$
$$\left(\int_{t_0}^{t_1} e^{\int_{\tau}^{t_1}\rho(s)ds}\,P(\tau)d\tau + x_0 e^{\int_{t_0}^{t_1}\rho(s)ds} - x_1\right)^{-a},$$
$$(3.5)$$

если знаменатель дроби (3.5) отличен от нуля.

4. Фазовое ограничение на накопленные сбережения. Подставив (2.9) в (3.1), получим

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}P(\tau)e^{\int_\tau^t\rho(s)ds}\,d\tau-\left(\frac{\gamma}{D}\right)^{\frac{1}{a}}\int_{t_0}^{t}e^{\int_\tau^t\rho(s)ds+\frac{1}{a}\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds-\frac{\delta}{a}\tau}\,d\tau+x_0e^{\int_{t_0}^{t}\rho(s)ds}. \quad (4.1)$$

Для упрощения введем обозначение

$$\Theta(t)=\int_{t_0}^{t}P(\tau)e^{\int_\tau^t\rho(s)ds}\,d\tau+x_0e^{\int_{t_0}^{t}\rho(s)ds}>0. \quad (4.2)$$

С учетом (4.2) выражение (4.1) выглядит более просто:

$$x(t)=\Theta(t)-\left(\frac{\gamma}{D}\right)^{\frac{1}{a}}\int_{t_0}^{t}e^{\int_\tau^t\rho(s)ds+\frac{1}{a}\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds-\frac{\delta}{a}\tau}\,d\tau. \quad (4.3)$$

Из (3.4) и (4.2) имеем

$$\left(\frac{\gamma}{D}\right)^{\frac{1}{a}}=(\Theta(t_1)-x_1)\left(\int_{t_0}^{t_1}e^{\int_\tau^{t_1}\rho(s)ds}\,e^{\frac{1}{a}\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds-\frac{\delta}{a}\tau}d\tau\right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Введем обозначение

$$\Psi(t)=\int_{t_0}^{t}e^{\int_\tau^t\rho(s)ds+\frac{1}{a}\int_{t_0}^{\tau}\rho(s)ds-\frac{\delta}{a}\tau}\,d\tau>0. \quad (4.5)$$

Тогда с учетом (4.5) выражения (4.4) и (4.3) выглядят теперь достаточно просто:

$$\left(\frac{\gamma}{D}\right)^{\frac{1}{a}}=\frac{(\Theta(t_1)-x_1)}{\Psi(t_1)}, \quad (4.6)$$

$$x(t)=\Theta(t)-\left(\frac{\gamma}{D}\right)^{\frac{1}{a}}\Psi(t). \quad (4.7)$$

Подставляем теперь (4.6) в (4.7):

$$x(t)=\Theta(t)-(\Theta(t_1)-x_1)\frac{\Psi(t)}{\Psi(t_1)}=\Psi(t)\left(\frac{\Theta(t)}{\Psi(t)}-\frac{\Theta(t_1)}{\Psi(t_1)}+\frac{x_1}{\Psi(t_1)}\right). \quad (4.8)$$

Введем индикаторную функцию

$$\Phi(t)=\frac{\Theta(t)}{\Psi(t)}. \quad (4.9)$$

С учетом (4.9) накопленные сбережения (4.8) могут быть представлены в виде

$$x(t)=\Psi(t)\left(\Phi(t)-\Phi(t_1)+\frac{x_1}{\Psi(t_1)}\right). \quad (4.10)$$

Представление накопленных сбережений в виде (4.10), т.е. через индикаторную функцию (4.9), довольно удобно для изучения фазового ограничения (1.5). Наиболее простым достаточным условием выполнения (1.5) является справедливость неравенства

$$\Phi(t)-\Phi(t_1)\geq 0. \quad (4.11)$$

Обратимся к (4.10) при (4.9),

$$P(t)=P_0e^{pt}, P_0=const>0,$$

$$p=const>0, \quad (4.12)$$

$$\rho(t)=\rho=const>0. \quad (4.13)$$

Из нее с учетом

$$p=\rho>0,\frac{\rho}{a}-\frac{\delta}{a}-\rho\neq 0, a>0 \quad (4.14)$$

получим выражение, преобразовывая которое, имеем

$$\frac{(\rho-\delta-\rho a)x(t)}{aP_0e^{pt}(e^{\sigma}-1)}=\frac{\sigma}{e^{\sigma}-1}-\frac{\sigma_1}{e^{\sigma_1}-1},$$

$$\sigma=\frac{\rho-\delta-\rho a}{a}(t-t_0),$$

$$\sigma_1=\frac{\rho-\delta-\rho a}{a}(t_1-t_0). \quad (4.15)$$

Для численной иллюстрации составим таблицу числовых значений функции $\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$, считая, что в нуле она продолжена по непрерывности:

σ	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$\sigma/(e^{\sigma}-1)$	1	0,9508	0,9033	0,8575	0,8133
σ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\sigma/(e^{\sigma}-1)$	0,7707	0,7298	0,6905	0,6528	0,6166
σ	1	1,1	1,2	1,3	1,4
$\sigma/(e^{\sigma}-1)$	0,5820	0,5489	0,5172	0,48770	0,4582
σ	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\sigma/(e^{\sigma}-1)$	0,4308	0,4048	0,3799	0,3565	0,3342
σ	2	2,1	2,2	2,3	2,4
$\sigma/(e^{\sigma}-1)$	0,3130	0,2930	0,2741	0,2563	0,2394
σ	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\sigma/(e^{\sigma}-1)$	0,2236	0,2086	0,1945	0,1842	0,1689

σ	3	3,1	3,2	3,3	3,4
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,1572	0,1462	0,1360	0,1264	0,1174
σ	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,1090	0,1011	0,0938	0,0870	0,0806
σ	4	4,1	4,2	4,3	4,4
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0746	0,0691	0,0639	0,0591	0,0547
σ	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0506	0,0467	0,0431	0,0398	0,0368
σ	5	5,1	5,2	5,3	5,4
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0339	0,0313	0,0288	0,0266	0,0245
σ	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,226	0,208	0,0191	0,0176	0,0162
σ	6	6,1	6,2	6,3	6,4
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0149	0,0137	0,0126	0,0116	0,0107
σ	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0098	0,0090	0,0083	0,0076	0,0070
σ	7	7,1	7,2	7,3	7,4
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0064	0,0059	0,0054	0,0049	0,0045
σ	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0042	0,0038	0,0035	0,0032	0,0029
σ	8	8,1	8,2	8,3	8,4
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0027	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019
σ	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0017	0,0018	0,0014	0,0013	0,0012
σ	9	9,1	9,2	9,4	9,5
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0011	0,0010	0,0009	0,0008	0,0007
σ	9,7	9,8	10,1	10,3	10,7
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003	0,0002
σ	11,3	12,5			
$\sigma\,/\,(e^{\sigma}-1)$	0,0001	0,0000			

Из таблицы видно, что табличная функция строго монотонно убывает, а поэтому правая часть (4.15) в случае (4.12), (4.13) и (4.14) положительна, так как $\sigma < \sigma_1$. Отсюда, мы имеем положительность экстремали внутри временного интервала.

Обсуждение

В условиях экономического хаоса и нестабильности домашние хозяйства демонстрируют стабильную выживаемость, которой могут позавидовать многочисленные предприятия. В очень важной задаче оптимального разделения материальных средств на потребляемую и накапливаемую части в микроэкономике и макроэкономике должны быть сходства и различия. Как в макроэкономике [1, 2], нужно максимизировать потребление, однако не в чистом виде. Как в работах [8–12], максимизируется интегральная дисконтированная полезность потребления. Дополнительное фазовое ограничение (1.5), имеющее естественный экономический смысл, серьезно усложняет задачу. Представление (4.10) при (4.9) дает эффективное достаточное условие (4.11) для справедливости (1.5). Как и в работах [1, 2], здесь использовался вариационный метод и рассматривалась задача с закрепленными концами.

Заключение

Таким образом выполнена постановка и решение важной задачи оптимального разделения материальных средств на потребляемую и накапливаемую части в микроэкономике. Предложен алгоритм построения оптимального управления микроэкономической системой, поскольку все значительно усложняется наложением естественного фазового ограничения неотрицательности накопленных сбережений. Так же, как и в макроэкономике, оптимизируется потребление, но не в чистом виде, а максимизируется интегральная дисконтированная полезность потребления. Уравнение связи в рассматриваемой работе отличается от аналогичного макроэкономического уравнения, поскольку домашнее хозяйство существует и выживает в кризисных условиях не так, как это делают социальные организмы и крупные предприятия. В процессе решения были учтены фазовые ограничения на накопленные сбережения. При построении системы уравнений и ограничений предполагались заданными начальный и конечный моменты времени. Начальное состояние системы фиксировано. Эти ограничения необходимы, чтобы рассматриваемые траектории не покидали заданной области пространства, что и необходимо реальным микроэкономическим системам. Вычислительные процедуры по полученным моделям в настоящее время проходят апробацию на основе материалов отчета о финансовых результатах компании этого года.

1. *Chernyaev A.P., Meerson A.Yu., Sukhorukova I.V., Fomin G.P.* Methods for optimal Separation of Income in Consumable and Accumulated Parts // International Journal of Recept Technology and Engineering. 2020. Vol. 8, Iss. 6. Pp. 797–801.

2. *Chernyaev A.P., Meerson A.Yu., Sukhorukova I.V., Fomin G.P.* Features of mathematical formulation and solution of the problem of optimal division of fonds in the construction business // Innovations and Technologies in Construction : selected papers of BuildinTech BIT 2020. Springer, 2020.

3. Hybrid Method for Multi-Criteria Risk Minimization / I.V. Sukhorukova, G.P. Fomin [et al.] // Espacios. 2019. Vol. 40. Pp. 14–22.

4. *Меерсон А.Ю., Черняев А.П.* Варианты постановки задач оптимизации обобщенной полезности потребления в модели Солоу с ограничениями различного рода // Фундаментальные исследования. 2018. № 7. Экономические науки. С. 121–125.

5. *Меерсон А.Ю., Черняев А.П.* Задачи оптимального управления среднедушевым потреблением с уравнением связи для капиталовооруженности // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 2. С. 27–37.

6. *Черняев А.П.* Точные решения обыкновенных дифференциальных уравнений некоторых моделей экономической динамики : учеб.-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2019. – 44 с.

7. *Popov V.A.* Inflation and consumer basket // Journal of Reviews on Global Economics. 2018. Vol. 7, Special Issue. Pp. 453–456.

8. *Фомин Г.П., Сухорукова И.В., Мушруб В.А.* Методы оценки операционных рисков в торговле // Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2019. № 5 (107). С. 156–162.

9. *Sukhorukova I.V., Maksimov D.A., Fomin G.P.* Methods of risk minimization in investment and construction projects // Innovations and Technologies in Construction : selected papers of BuildinTech BIT 2020. Springer, 2020.

10. *Гуриев С.М., Поспелов И.Г.* Модель общего равновесия экономики переходного периода // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 2. С. 3–21.

11. *Комарова Е.В.* О существовании управлений для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями // Ученые записки Российского государственного социального университета. 2009. № 7-2 (70). С. 211–213.

12. *Сумин М.И.* Параметрическая задача оптимального управления полулинейным эллиптическим уравнением с поточечным фазовым ограничением и граничным управлением // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2000. Т. 5, № 4. С. 495–497.

13. *Тагиев Р.К.* Задача оптимального управления для квазилинейного параболического уравнения с управлениями в коэффициентах и с фазовыми ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 3. С. 380.

14. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Решение задачи группового управления с фазовыми ограничениями методом синтезированного оптимального управления // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2019. № 21. С. 85–96.

15. *Рыжкова Т.В.* Оптимизационная модель производственной функции в комплексной форме // Сборник методических рекомендаций по вопросам социально-экономического развития. Нижний Новгород, 2019. С. 5–8.

Поступила в редакцию 29.01.2021 г.

PHASE CONSTRAINTS IN MATERIAL MEANS SEPARATION MODELS IN MICROECONOMICS

© 2021 A.P. Chernyaev, I.V. Sukhorukova, G.P. Fomin, A.Yu. Meerson*

One of the important and urgent tasks of microeconomics is the problems of research of the economic system, in which there are restrictions associated with the planned volume of output or the size of the enterprise production capacity. These constraints are set by the requirement that the analyzed trajectories do not leave some given region of the control existence space. Most often, such restrictions for all time points are set in the form of inequalities, and certain requirements are imposed on the function of the phase coordinates of the object, their value at a given time. This problem is classified as an optimal control problem with mixed and phase constraints. In general, this area is of scientific interest and requires consideration. In this case, we study the microeconomic model of the household economy as the most stable object in the conditions of crises. The accumulated savings are subject to a natural phase constraint of non-negativity. This led to the study of the features of the microeconomic formulation of the problem of finding a method for the optimal division of material resources into consumed and accumulated parts, since the imposition of a natural phase restriction on the non-negativity of accumulated savings makes everything much more complicated. Just as in macroeconomics, consumption is optimized, but not in its pure form, but the integral discounted utility of consumption is maximized. The relation equation in this paper differs from a similar macroeconomic equation, since the household exists and survives in crisis conditions in a different way than do social organisms and large enterprises. That is why the article formulates and proves sufficient conditions for solving the problem with a phase constraint.

Keywords: optimal consumption, accumulated savings, phase limitation, indicator function.

Highlights:

- the important problem of optimal division of material resources into consumed and accumulated parts in microeconomics is formulated and solved;
- an algorithm for constructing optimal control of a microeconomic system is proposed.

Received for publication on 29.01.2021

* Alexander P. Chernyaev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Higher Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology (State University). E-mail: chernyaev49@yandex.ru; Irina V. Sukhorukova, Doctor of Economics, Professor of the Department of Higher Mathematics of the Plekhanov Russian University of Economics, Moscow. E-mail: suhorukovaira@yandex.ru; Gennady P. Fomin, Candidate of Technical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Methods in Economics of the Plekhanov Russian University of Economics, Moscow. E-mail: gpfomin@mail.ru; Alla Yu. Meerson, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Methods in Economics of the Russian State University of Economics, Moscow. E-mail: allameerson@yandex.ru.