УДК 330.356:330.43 DOI: 10.46554/1993-0453-2021-1-195-33-37

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

© 2021 Д.В. Иванов*

Построение моделей временных рядов по статистическим данным является одной из центральных задач современных эконометрических исследований. Для объяснения закономерностей экономического роста используются многочисленные экономические модели на основе дифференциальных или разностных уравнений. Статья посвящена оцениванию параметров моделей экономического роста на основе решений однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Проводится сравнительный анализ методов оценивания параметров авторегрессии рядов экономической динамики с аддитивной помехой в выходном сигнале. Результаты моделирования показали, что метод полных наименьших квадратов дает самые точные оценки. Наиболее часто применяемый метод наименьших квадратов дает наихудшие оценки.

Ключевые слова: экономический рост, авторегрессия, параметрическая идентификация, метод наименьших квадратов, инструментальные переменные, уравнения Юла-Уокера, тренд, сезонность.

Основные положения:

- предложено использовать модели авторегрессии с аддитивной стохастической компонентой в выходном сигнале для оценивания параметров экономического роста;
- проведено моделирование методов оценивания параметров авторегрессии с аддитивной стохастической компонентой в выходном сигнале;
- показано, что применение метода полных наименьших квадратов дает наиболее точные оценки параметров моделей экономического роста.

Введение

Экономический рост является одной из важнейших задач для любой страны. Для выработки адекватных управленческих решений необходимо понимать закономерности, лежащие в основе экономического роста. Для объяснения закономерностей экономического роста используются многочисленные экономические модели на основе дифференциальных или разностных уравнений. Одна из проблем построения таких моделей – необходимость определять параметры моделей по статистическим данным, которые обычно являются дискретными. Применение методов дискретизации для моделей на основе дифференциальных уравнений вносит дополнительную погрешность. Параметры моделей экономического роста могут быть оценены из решения дифференциальных уравнений. Однако решения даже линейных дифференциальных уравнений нелинейны по параметрам, что усложняет оценивание параметров.

Для моделирования моделей экономического роста с успехом применяется класс моделей авторегрессии – скользящего среднего[1], называемых также моделями ARMA (autoregressive moving average). Главным достоинством моделей данного класса является возможность определения линейных и нелинейных параметров моделей экономического роста через конструируемые при помощи Z-преобразования параметры ARMA-модели. Оценивание параметров на основе ARMA-моделей обеспечивает высокие точностные характеристики для аппроксимации и прогнозирования статистических данных для широкого, практически важного в приложениях набора моделей трендовых и колебательных

* Иванов Дмитрий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент Самарского государственного экономического университета. E-mail: dvi85@list.ru.

компонент. При определенных условиях ARMA-модель может быть заменена на более простую авторегрессионную модель.

При наличии помехи наблюдения оценки параметров авторегрессии, получаемые с помощью классического метода наименьших квадратов (МНК), оказываются смещенными[2], так как не выполняется условие Гаусса-Маркова об отсутствии автокорреляции в стохастической компоненте параметрической модели авторегрессии.

В данной статье представлены методы оценивания параметров моделей экономического роста в виде авторегрессии с аддитивной стохастической компонентой в выходном сигнале.

Методы

Для моделирования экономического роста широко применяются однородные линейные дифференциальные уравнения (модель Мальтуса, динамическая модель Леонтьева):

$$z^{(n)} + \alpha_1 z^{(n-1)} + \dots + \alpha_n z = 0. \qquad (1)$$

В общем случае решение дифференциального уравнения (1) является линейной комбинацией следующих решений: Ce^{kt}, $C_1 e^{kt} + C_2 x e^{kt}$, $e^{kt}(C_1 \cos w\, t + C_2 \sin w\, t)$.

Так как параметры k, w входят в решение нелинейно, то их оценивание связано со значительными сложностями. С помощью Z-преобразования решение уравнения (1) может быть представлено в виде линейного разностного уравнения:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} z_{i-m}. \qquad (2)$$

Так как реальные экономические процессы всегда имеют стохастическую компоненту, запишем:

$$y_i = z_i + \xi(i), \qquad (3)$$

где z_i, y_i – истинная и наблюдаемая переменные;

$\xi(i)$ – помеха наблюдения, для которой $E\{\xi(i)\} = 0$, где E – оператор математического ожидания.

Введем обозначения:

- вектора коэффициентов авторегрессии: $\theta = \left(b^{(1)}, \dots, b^{(r)}\right)^T$;
- вектора регрессоров: $\varphi_i = (y_{i-1}, \dots, y_{i-r})^T$.

Запишем уравнения (2), (3) в форме линейной регрессии:

$$y_i = \varphi_i^T \theta + \varepsilon_i, \qquad (4)$$

где стохастическая компонента ε_i описывается уравнением:

$$\varepsilon_i = \xi(i) - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \xi(i-m). \qquad (5)$$

Для получения несмещенных оценок параметров вместо метода наименьших квадратов часто применяют метод инструментальных переменных.

Будем полагать, что можно подобрать вектор инструментальных переменных ψ_i со следующими свойствами:

- вектор ψ_i не коррелирует со стохастической компонентой ε_i;
- вектор ψ_i имеет высокую корреляцию с вектором φ_i.

Оценка вектора коэффициентов методом инструментальных переменных определяется следующим выражением:

$$\hat{\theta}_{IV} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i \varphi_i^T\right)^{-1} \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i y_i\right). \qquad (6)$$

Оценки, полученные с помощью выражения (6), часто имеют малую точность, это связано с плохой обусловленностью матрицы обратной матрицы, входящей в выражение (6). Для повышения точности оценок вектора коэффициентов θ увеличивают размерность вектора инструментальных переменных так, чтобы выполнялось условие $dim\psi_i > r$. Данная модификация называется расширенным методом инструментальных переменных. Оценка вектора коэффициентов для расширенного метода инструментальных переменных определяется из выражения[3]:

$$\hat{\theta}_{EIV} = (\hat{R}_{\psi\phi} W \hat{R}_{\psi\phi})^{-1} (\hat{R}_{\psi\phi} W \hat{r}_{\psi y}), \qquad (7)$$

где $\hat{R}_{\psi\phi} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i \phi_i^T$, $\hat{r}_{\psi y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i y_i$;

W – взвешивающая матрица (выбор оптимальной взвешивающей матрицы рассмотрен зарубежными учеными[4]).

В качестве вектора инструментальных переменных для авторегрессии с аддитивной помехой могут быть использованы задержанные значения выхода[5]:

$$\psi_i = \left(y_{i-1-l_1} \dots y_{i-1-l_1-n_1}\right)^T,$$

где $l_1 \geq r, n_1 \geq r$.

Методы на основе уравнений Юла-Уокера. Уравнения Юла-Уокера для авторегрессии имеют вид:

$$\begin{pmatrix} R_z(0) & & R_z(-(r-1)) \\ & \ddots & \\ R_z(r-1) & & R_z(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(r)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} R_z(1) \\ \vdots \\ R_z(r) \end{pmatrix},$$

где $R_z(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=\tau}^{N} z_i z_{i-\tau}$.

При аддитивном шуме автокорреляционная функция и уравнения Юла-Уокера имеют вид:

$$R_y(0) = R_z(0) + \sigma_2^2, R_y(\tau) = R_z(\tau), \tau > 0,$$

$$\begin{pmatrix} R_y(0) & & R_z(-(r-1)) \\ & \ddots & \\ R_z(r-1) & & R_y(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(r)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} R_z(1) \\ \vdots \\ R_z(r) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

оценки, получаемые решением системы уравнений (8), оказываются смещенными.

Существует два принципиально различных подхода для оценивания параметров, использующих уравнения Юла-Уокера. Первый подход состоит в том, что оценивание параметров авторегрессии происходит на основе переопределенной расширенной системы уравнений[6]. Данный подход родственен методу инструментальных переменных:

$$\begin{vmatrix} R_y(r) & \dots & R_y(1) \\ R_y(r+1) & \dots & R_y(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y(r+l_1) & \dots & R_y(1+l_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(r)} \\ 0_{(l_1-r)\times 1} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} R_y(r+1) \\ R_y(r+2) \\ \vdots \\ R_y(r+l_1) \end{vmatrix}, \ l_1 \geq r. \quad (9)$$

Второй подход основан на компенсации смещения и требует оценивания дисперсии помехи наблюдения. При применении компенсации система уравнений Юла-Уокера становится нелинейной с неизвестными параметрами λ и $\bar{\theta}$[7]:

$$\left(\bar{R}_y - \lambda B\right)\bar{\theta} = 0, \quad (10)$$

$$\bar{R}_y = \begin{vmatrix} R_y(1) & R_y(0) & \dots & R_y(-(r-1)) & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ R_y(r) & R_y(r-1) & \dots & R_y(0) & - \\ R_y(r+1) & R_y(r) & \dots & R_y(1) & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ R_y(r+l_2) & R_y(r+l_2-1) & \dots & R_y(l_2) & \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, l_2 > 1.$$

Полный метод наименьших квадратов[8] (ПМНК) позволяет получать несмещенные оценки вектора параметров авторегрессии при наличии помех наблюдений. Идея метода заключается в использовании для минимизации ошибки нормы Фробениуса. Для уравнения (4) несмещенные оценки вектора коэффициентов авторегрессии получаются минимизацией представленного критерия:

$$\hat{\theta}_{TLS} = \min_{\theta \in \bar{B}} \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \phi_i^T \theta\right)^2}{\sigma^2 + \sigma^2 \theta^T \theta} = \min_{\theta \in \bar{B}} \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \phi_i^T \theta\right)^2}{1 + \theta^T \theta}. \quad (11)$$

Результаты

Проведем сравнительный анализ методов оценивания параметров моделей экономического роста на тестовом примере. В качестве примера использовано решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с комплексными корнями, данная модель позволяет моделировать как трендовую, так и случайную составляющую экономического роста:

$$y_i = 4\,exp(-4t_i)\,cos(2t_i - 0.5) + \xi(i). \quad (12)$$

Величина среднеквадратического отклонения для помехи $\xi(i)$ была выбрана равной $\sigma = 0{,}25$.

Результаты оценивания параметров модели (13)

Метод оценивания	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	δb, %	δz, %	R^2
Истинные значения	1,6681	-0,8187	0	0	0,9484
LS	1,0677	-0,3415	41,4	55,4	0,6678
YW	1,6808	-0,8588	2,3	19,8	0,9173
EIV	1,6492	-0,8319	1,6	7,3	0,9378
TLS	1,6575	-0,8047	0,9	4,9	0,9456

Для частоты дискретизации равной $\Delta t = 0{,}2$ уравнению (12) соответствует модель авторегрессии второго порядка с помехой $\xi(i)$ $(i > 2)$:

$$z_i = 1.6682 z_{i-1} - 0.8187 z_{i-2},$$
$$y_i = z_i + \xi(i), \qquad (13)$$

Оценим коэффициенты модели (13) представленными в статье методами:

♦ методом расширенных инструментальных переменных (EIV). В качестве вектора инструментальных переменных для авторегрессии с аддитивной помехой могут быть использованы задержанные значения выхода;

♦ на основе уравнений Юла-Уолкера (YW) высокого порядка (9);

♦ методом полных наименьших квадратов (11) (TLS);

♦ методом наименьших квадратов (LS).

Сравнение методов осуществлялось по приведенным ниже характеристикам:

♦ относительной погрешности оценивания вектора параметров авторегрессии:

$$\delta\theta = \sqrt{\frac{\left\|\hat{\theta} - \theta_0\right\|^2}{\|\theta_0\|^2}} \cdot 100\frac{0}{0};$$

♦ относительной погрешности аппроксимации:

$$\delta z = \sqrt{\frac{\|\hat{z} - z\|^2}{\|z\|^2}} \cdot 100\%,$$

где $z = |z_i, \dots z_N|^T$ — вектор истинных значений переменной;

$\hat{z} = |\hat{z}_i, \dots \hat{z}_N|^T$ — оценка вектора истинных значений, рассчитанная с помощью полученной по статистическим данным модели авторегрессии;

♦ коэффициенту детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{z}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - E[y_i])^2}.$$

Результаты оценивания параметров модели (13) представлены в таблице.

Длина выборки N=40.

Обсуждение

Представленные в таблице результаты показывают, что точные оценки позволяет получить метод полных наименьших квадратов. Классический метод наименьших квадратов показывает наихудшие результаты.

Обобщение представленных результатов на случай нелинейных моделей экономического роста представляет интерес и является темой дальнейших исследований.

Заключение

В статье рассмотрены методы оценивания параметров моделей экономического роста на основе моделей авторегрессий с аддитивными стохастическими компонентами. Применение моделей авторегрессий позволяет перейти от нелинейной по параметрам статической задаче оценивания к линейной по параметрам динамической задаче. Данный подход упрощает процедуру оценивания параметров моделей экономического роста и увеличивает точность получаемых оценок.

---

[1] *Семёнычев В.К.* Идентификация экономической динамики на основе моделей авторегрессии. Самара : Изд-во СНЦ РАН, 2004. 243 с.

[2] *Семёнычев В.К., Семёнычев В.В., Коробецкая А.А.* Исследование точности метода моделирования и прогнозирования экспоненциальной тенденции на основе обобщенных параметрических ARMA-моделей // Вестник Самарского муниципального университета управления. 2010. № 2 (13). С. 7–14.

[3] *Söderström T., Stoica P.* Instrumental Variable Methods for System Identification. Berlin : Springer-Verlag, 1983.

[4] *Stoica P., Cedervall M., Eriksson A.* Combined instrumental variable and subspace fitting approach to parameter estimation of noisy input-output systems // IEEE Transactions on Signal Processing. 1995. Vol. 43. P. 2386–2397.

[5] *Thil S., Gilson M., Garnier H.* On instrumental variable-based methods for errors-in-variables model

identification // Proc. 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 6–11, 2008.

[6] *Cadzow J.* Spectral estimation: An overdetermined rational model equation approach // Proc. IEEE. Sept. 1982. Vol. 70. Pp. 907–939.

[7] *Davila C.E.* A Subspace Approach to Estimation of Autoregressive Parameters from Noisy Measurements // IEEE Transactions on Signal Processing. Feb. 1998. Vol. 46, No. 2. Pp. 531–534.

[8] *Кацюба О.А., Жданов А.И.* Идентификация методом наименьших квадратов уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 29–32.

Поступила в редакцию 09.09.2020 г.

ESTIMATION OF PARAMETERS OF ECONOMIC GROWTH AUTOREGRESSIVE MODELS

© 2021 D.V. Ivanov*

The construction of time series models based on statistical data is one of the central tasks of modern econometric studies. Numerous economic models based on differential equations are used to explain the patterns of economic growth. The article is devoted to the estimation of parameters of economic growth models based on solutions of homogeneous differential equations with constant coefficients. A comparative analysis of methods for estimating the parameters of autoregression of economic dynamics series with additive interference in the output signal is carried out. The simulation results showed that the full least squares method gives the most accurate estimates. The most commonly used least squares method gives the worst estimates.

Keywords: economic growth, autoregression, parametric identification, least squares method, instrumental variables, Yule-Walker equations, trend, seasonality.

Highlights:

- it is proposed to use autoregression models with an additive stochastic component in the output signal to estimate the parameters of economic growth;
- methods for estimating autoregression parameters with an additive stochastic component in the output signal are modeled;
- It is shown that the application of the full least squares method gives the most accurate estimates of the parameters of economic growth models.

Received for publication on 09.09.2020

* Dmitry V. Ivanov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Samara State University of Economics. E-mail: dvi85@list.ru.