

## О СВОЙСТВАХ КОПУЛА-ФУНКЦИИ, ПОСТРОЕННОЙ ИЗ СОВМЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИК ГРАББСА

© 2015 Л.К. Ширяева\*

**Ключевые слова:** копула-функция, совместное распределение односторонних статистик Граббса, скаттерплоты, коэффициент ранговой корреляции Спирмена, нормальное распределение, стандартизированные минимум и максимум, метод Монте-Карло.

Рассмотрены односторонние статистики Граббса, т.е. стандартизированные максимум и минимум, вычисленные по нормальной выборке. Из совместного распределения этих статистик методом инверсии построена новая однопараметрическая копула-функция. Построены графики смоделированных значений из этой копулы. Найдено, что копула Граббса позволяет описывать отрицательные взаимосвязи между случайными переменными. Построена аппроксимация для коэффициента ранговой корреляции Спирмена этой копулы. Выполнены модельные расчеты функции совместного распределения случайных величин, когда их взаимосвязь описывается копулой Граббса, и каждая из случайных величин имеет распределение Коши.

Необходимость исследования совместных распределений экономических и финансовых переменных часто возникает при моделировании макроэкономических процессов, а также в задачах финансового рынка, страхования и эконометрики. К таковым относятся задачи оценки, анализа и управления финансовыми и страховыми рисками, доходностями разных финансовых инструментов<sup>1</sup>.

Традиционный подход, до недавнего времени широко применяемый при решении подобных задач, состоял в том, что для моделирования совместного распределения исследуемых экономических переменных использовалась модель многомерного нормального закона распределения. Однако, как подчеркивает Д. Фантаццини, ссылаясь на мнение многочисленных исследователей, “использование для таких задач модели многомерного нормального (гауссовского) закона не отражает специфики имеющихся исходных статистических данных”<sup>2</sup>. Поэтому для адекватного описания взаимосвязей, существующих между экономическими и финансовыми переменными, следует применять не только модель многомерного гауссовского распределения, но и иные модели совместных распределений. Копула-функции и являются средством для моделирования многомерных распределений. Как указывает Д. Фантаццини, “копула-функция является

функцией, агрегирующей всю информацию относительно структуры зависимости между компонентами случайного вектора”<sup>3</sup>.

Имеется несколько конструктивных типов копул: эллиптические, архимедовы и экстремальные<sup>4</sup>. В частности, к эллиптическим копулам относятся нормальная (гауссова) копула и  $t$ -копула Стьюдента. Эллиптические копулы позволяют восстанавливать симметричные многомерные распределения<sup>5</sup>, и поэтому они часто используются в актуарной математике, страховании и финансах.

Статистическое моделирование с использованием копула-функций в приложениях появилось в конце 1990-х гг.<sup>6</sup> В русскоязычных статьях первые примеры прикладного использования копул можно найти у Б.Е. Бродского, Г.И. Пенникаса, И.А. Сафаряна и В.Б. Симаковой<sup>7</sup>. Так, в работе Г.И. Пенникаса<sup>8</sup> была рассмотрена задача управления валютным риском банка. Ее решение предполагало оценивание совместного распределения логарифмических доходностей обменного курса различных валют. Для этого применены два подхода: традиционный, когда для описания совместного распределения логарифмических доходностей было использовано многомерное нормальное распределение, и подход, основанный на копулах. Сопоставляя эти подходы, Г.И. Пеникас делает вывод, что “применение копул является предпочтительным,

\* Ширяева Людмила Константиновна, кандидат физико-математических наук, доцент Самарского государственного экономического университета. E-mail: Shiryeva\_LK@mail.ru.

поскольку приводит к большему уровню доходности при одинаковом размере валютного риска”<sup>9</sup>.

Систематическое изложение основ теории копула-функций и моделирования многомерных распределений с использованием копула-функций содержится в работах Ю.Н. Благовещенского<sup>10</sup>, Д. Фантаццини<sup>11</sup> и в учебнике С.А. Айвазяна и Д. Фантаццини<sup>12</sup>.

Копула-функция может быть извлечена из известного совместного распределения случайных переменных. Такой способ построения копулы основан на известной теореме Склара<sup>13</sup>. В частности, именно таким способом были построены нормальная (гауссова) копула и *t*-копула Стьюдента со скалярным параметром степеней свободы.

Исследователи предпринимают и новые попытки создания копула-функций. Например, в диссертации А.И. Балаева новая копула была сконструирована из многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы<sup>14</sup>. Необходимость построения новой копулы А.И. Балаев обосновывает тем обстоятельством, что традиционно применяемая *t*-копула Стьюдента со скалярным параметром степеней свободы не всегда адекватно описывает многомерное распределение доходностей фондовых индексов.

Очевидно, что для восстановления реально существующих многомерных распределений может оказаться недостаточно уже существующей коллекции копул. Новые копула-функции могут послужить основанием для конструирования новых многомерных распределений.

В данной работе исследованы некоторые свойства новой однопараметрической копула-функции, построенной из совместного распределения односторонних статистик Граббса.

### О распределении односторонних статистик Граббса

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - случайная выборка из  $n$  значений нормально распределенной случайной величины  $X$ ;  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n-1)} \leq X_{(n)}$  - построенный по ней упорядоченный вариационный ряд. Рассмотрим односторонние статистики Граббса, т.е.

$$T_n^{(1)} = (X_{(n)} - \bar{X}) / S; \\ T_{n,(1)} = (\bar{X} - X_{(1)}) / S, \quad (1)$$

$$\text{где } \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n; S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n - 1).$$

Односторонние статистики Граббса  $T_n^{(1)}$  и  $T_{n,(1)}$  представляют собой стандартизированные максимум и минимум, вычисленные по нормальной выборке объема  $n$ . Легко убедиться, что частные (маргинальные) распределения статистик  $T_n^{(1)}$  и  $T_{n,(1)}$  совпадают, т.е.

$$P(T_{n,(1)} < t) = P(T_n^{(1)} < t).$$

Пусть  $F_n^{(1)}(t) = P(T_n^{(1)} < t)$  - интегральная функция распределения статистики  $T_n^{(1)}$ . Рекурсивные соотношения для вычисления значений функции  $F_n^{(1)}(t)$  имеют следующий вид<sup>15</sup>:

$$F_n^{(1)}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1/\sqrt{n}, n \geq 2; \\ n \int_{1/\sqrt{n}}^t F_{n-1}^{(1)}(g_n(x)) f_{T_n}(x) dx, & 1/\sqrt{n} < t < (n-1)/\sqrt{n}, n > 2; \\ 1, & t > (n-1)/\sqrt{n}, n \geq 2, \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{где } g_n(x) = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} \cdot \frac{nx}{n-1} / \left( 1 - \frac{nx^2}{(n-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$f_{T_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-2)/2)} x$$

$$x \left( 1 - \frac{nx^2}{(n-1)^2} \right)^{\frac{n-4}{2}};$$

$\Gamma(x)$  - гамма-функция Эйлера в точке  $x$ .

Из формулы (2) следует, что маргинальные распределения статистик  $T_n^{(1)}$  и  $T_{n,(1)}$  являются однопараметрическими, т.е. зависят только от одного параметра  $n$ , так что  $n \in \mathbb{N}$  и  $n \geq 2$ .

Пусть  $\Lambda_n(t_1, t_2) = P(T_{n,(1)} < t_1, T_n^{(1)} < t_2)$  - совместная функция распределения статистик Граббса  $T_{n,(1)}$  и  $T_n^{(1)}$ . Рекурсивные соотношения для вычисления  $\Lambda_n(t_1, t_2)$  имеют вид<sup>16</sup>

$$\Lambda_n(t_1, t_2) = \begin{cases} F_n^{(1)}(t_2), & t_1 \geq (n-1)/\sqrt{n}, \quad n > 2; \\ F_n^{(1)}(t_1), & t_2 \geq (n-1)/\sqrt{n}, \quad n > 2; \\ n \int_{1/\sqrt{n}}^{t_2} \Lambda_{n-1}(\rho_n(t_1, -x), g_n(x)) f_{T_n} \times \\ \times (x) dx, & n > 2, (t_1, t_2) \in \Delta_n; \\ 0, & (t_1, t_2) \notin \Delta_n, t_1 < (n-1)/\sqrt{n}; \\ t_2 < (n-1)/\sqrt{n}, & n > 2, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\rho_n(t, z) = \sqrt{(n-2)/(n-1)}(t+z/(n-1)) /$

$$/ \left(1 - nz^2 / (n-1)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\Delta_n = \left[1/\sqrt{n}, (n-1)/\sqrt{n}\right]^2, \quad n > 2;$$

$$\Lambda_2(t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } (t_1, t_2) \notin \Delta_2; \\ 1, & \text{если } (t_1, t_2) \in \Delta_2; \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \left[1/\sqrt{2}, \infty\right]^2.$$

Из соотношений (3) следует, что совместное распределение статистик  $T_n^{(1)}$  и  $T_{n,(1)}$  также является однопараметрическим, поскольку оно определяется натуральными параметрами  $n$  и  $n \geq 2$ .

### Построение копулы Граббса и исследование ее свойств

Копулу Граббса получим инверсией из двумерного распределения  $\Lambda_n(t_1, t_2)$ , ( $n > 2$ ), используя следствие из теоремы Склара<sup>17</sup>. Обозначим через  $\phi_n(\cdot)$  функцию, обратную функции частного распределения  $F_n^{(1)}$ . Тогда для  $\forall(u, v)$  из

единичного квадрата существует единственная копула  $C_{Gr}(u, v; n) : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  такая, что

$$C_{Gr}(u, v; n) = \Lambda_n(\phi_n(u), \phi_n(v)). \quad (4)$$

Так как функция  $\Lambda_n(t_1, t_2)$  является симметричной<sup>18</sup>, то и копула-функция Граббса также обладает свойством симметричности, т.е.

$$C_{Gr}(u, v; n) = C_{Gr}(v, u; n).$$

Для изучения силы взаимосвязи между случайными переменными, заключенными в копулу Граббса, применим графический анализ скаттерплотов. Скаттерплот представляет собой график сархивированных значений из копулы Граббса могут быть получены посредством розыгрыша по методу Монте-Карло значений статистик Граббса и их последующей равнометризации. Таким образом, для копулы Граббса координаты точек скаттерплота - это наблюдаемые значения двумерного случайного вектора  $(U, V)$ , компоненты которого удовлетворяют условию

$$U = F_n^{(1)}(T_{n,(1)}); \quad V = F_n^{(1)}(T_n^{(1)}).$$

Поэтому наблюдаемые значения статистик Граббса  $T_{n,(1)}$  и  $T_n^{(1)}$  вычислялись по формулам (1) по выборке из разыгранных значений  $\{X_i\}_{i=1}^n$  нормально распределенной случайной величины  $X$ , а компоненты случайного вектора  $(U, V)$  вычислялись в точках  $T_{n,(1)}$  и  $T_n^{(1)}$  по формулам (2).

На рис. 1 - 4 приведены примеры скаттерплотов из копулы Граббса для случая, когда ее параметр  $n = 4, 7, 15, 35$ . Из рис. 1 - 4 видно, что зависимость между случайными величинами, связанными копулой Граббса, является отрицательной. При этом величина параметра  $n$  оказывает существенное влияние на силу взаимосвязи случайных переменных. Если для  $n < 15$  наблюдается сильная взаимосвязь, то для  $n \geq 15$  зависимость становится слабо выраженной, так что для  $n \gg 35$  можно считать, что случайные переменные, заключенные в копулу Граббса, распределены независимо.

Для количественной оценки силы взаимосвязи случайных переменных, заключенных в копулу Граббса, может быть использован коэффициент ранговой корреляции Спир-

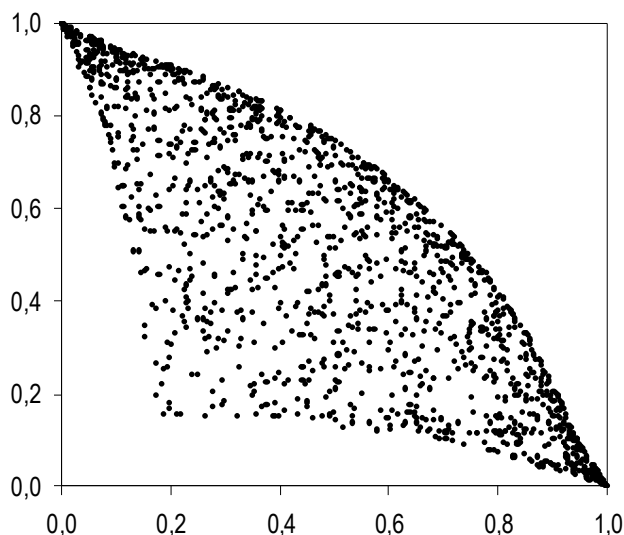


Рис. 1. Скаттерплот из копулы Грabbса для случая  $n = 4$

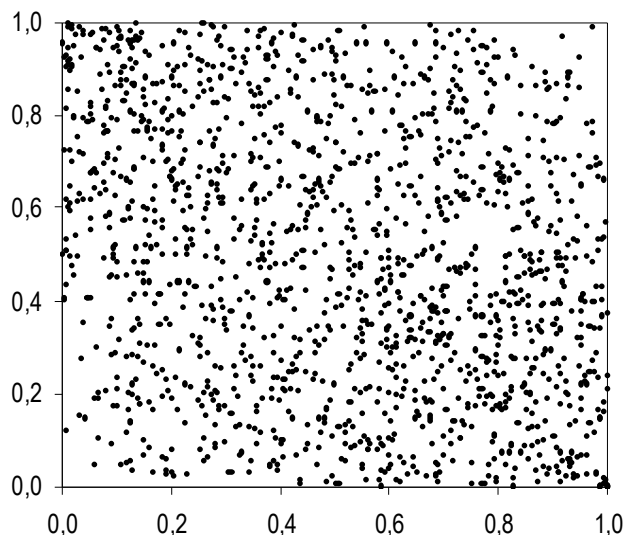


Рис. 4. Скаттерплот из копулы Грabbса для случая  $n = 35$

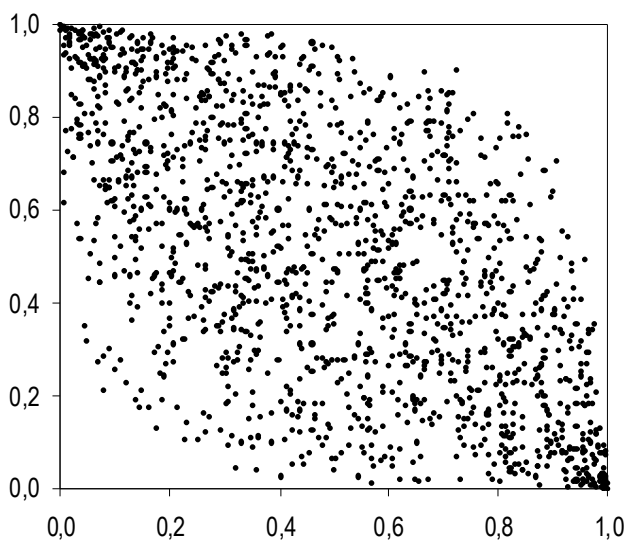


Рис. 2. Скаттерплот из копулы Грabbса для случая  $n = 7$

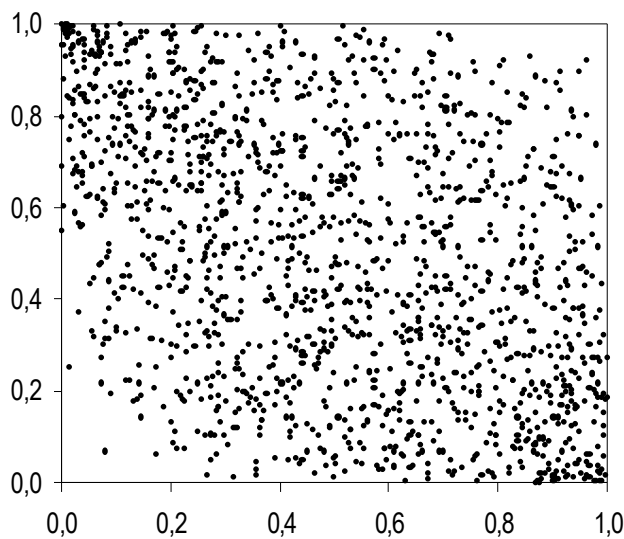


Рис. 3. Скаттерплот из копулы Грabbса для случая  $n = 15$

мена ( $\rho$ -Спирмена)<sup>20</sup>. Для вычисления  $\rho$ -Спирмена было применено моделирование по методу Монте-Карло.

В алгоритм вычисления несмещенных оценок коэффициента  $\rho$ -Спирмена включены следующие шаги:

- 1) разыгрывание значений  $\{X_i\}_{i=1}^n$  нормально распределенной случайной величины  $X$ ;
- 2) вычисление по формулам (1) наблюдаемых значений статистик Грabbса  $T_{n,(1)}$  и  $T_n^{(1)}$ ;
- 3) равнометризация компонент случайного вектора  $(T_{n,(1)}, T_n^{(1)})$ , т.е. вычисление значений случайных переменных  $U$  и  $V$  по формулам  $U = F_n^{(1)}(T_{n,(1)})$  и  $V = F_n^{(1)}(T_n^{(1)})$ ;
- 4) повтор шагов 1-3,  $M = 3000$  раз;
- 5) вычисление по найденным массивам  $\{U_k, V_k\}_{k=1}^M$  несмещенной оценки для коэффициента  $\rho$ -Спирмена<sup>21</sup>:

$$\hat{\rho}_S = \frac{c\hat{ov}(U, V)}{\hat{\sigma}(U)\hat{\sigma}(V)}, \quad (5)$$

где  $c\hat{ov}(U, V) = \overline{(U - \bar{U})(V - \bar{V})}$ ;  $\hat{\sigma}(U) = \sqrt{c\hat{ov}(U, U)}$ ;  $\hat{\sigma}(V) = \sqrt{c\hat{ov}(V, V)}$ .

- 6) повтор шагов 1-5 для значений параметра  $n$ , удовлетворяющих условию  $3 < n < 21$ .

Несмещенные оценки коэффициента  $\rho$ -Спирмена, вычисленные по формуле (5), приведены на рис. 5. Видно, что коэффициент  $\rho$ -Спирмена отрицателен. Это означает, что копула Граббса моделирует отрицательную зависимость между случайными величинами. При этом с ростом параметра  $n$  наблюдается существенное уменьшение (по абсолютной величине) значений коэффициента  $\rho$ -Спирмена, так что уже при  $n \gg 20$  можно ожидать, что указанный коэффициент будет близок к нулю. Из рис. 5 также видно, что в случае  $4 < n < 14$  коэффициент  $\rho$ -Спирмена удовлетворяет условию  $-1 < \rho < -0,5$ . Поэтому можно считать, что здесь имеет место сильная отрицательная взаимосвязь между случайными величинами, связанными копулой Граббса.

Несмещенные оценки коэффициента  $\rho$ -Спирмена были использованы для построения приближенной формулы, описывающей зависимость данного коэффициента от параметра  $n$ . Такая формула для коэффициента  $\rho$ -Спирмена была получена методом наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{\rho}_{МНК} = 0,018 - 1,63 / \sqrt{n}, \quad (6)$$

$$(R^2 = 0,989).$$

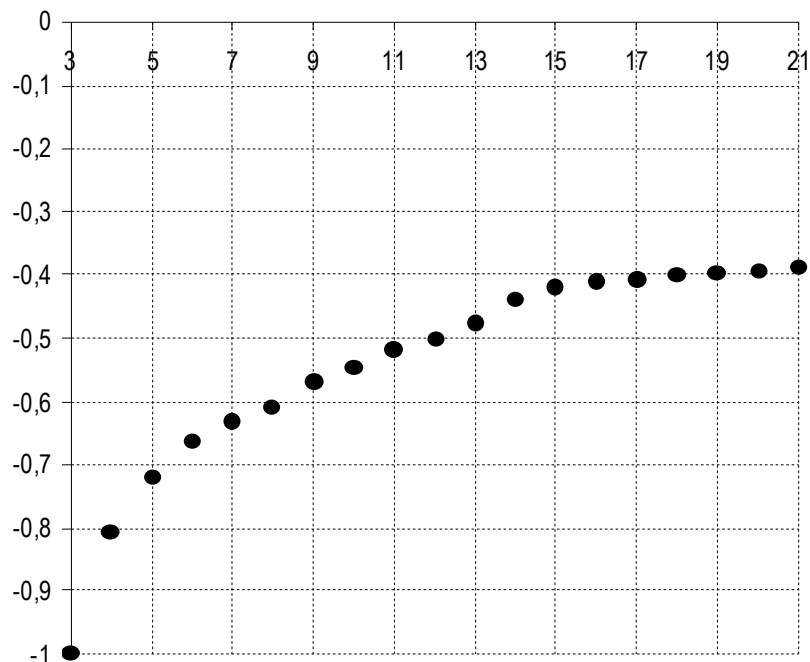


Рис. 5. График зависимости несмещенной оценки коэффициента  $\rho$ -Спирмена от параметра  $n$

На рис. 6 приведены результаты расчета МНК-оценок коэффициента  $\rho$ -Спирмена по формуле (6). В случае  $n > 20$  значения  $\hat{\rho}_{МНК}$  являются прогнозными. Для контроля за точностью прогноза были выполнены расчеты  $\hat{\rho}_{МНК}$  и  $\hat{\rho}_S$  по формулам (5) и (6) для  $20 < n < 80$ , показавшие, что в случае  $20 < n < 80$  относительная ошибка прогноза

$$\delta = \left| \frac{\hat{\rho}_{МНК} - \hat{\rho}_S}{\hat{\rho}_S} \right| \cdot 100\%$$

удовлетворяла условию  $\delta < 10\%$ . Например, в случае  $n = 35$  оценка  $\hat{\rho}_S = -0,28061$ , МНК-оценка  $\hat{\rho}_{МНК} = -0,29386$ . Как следствие, относительная ошибка прогноза  $\delta = 4,7\%$ .

*Пример.* В качестве примера моделирования зависимости между случайными переменными  $X$  и  $Y$  с помощью копулы Граббса рассмотрим случай, когда случайные переменные  $X$  и  $Y$  имеют двухпараметрическое распределение Коши, т.е.  $P(X < x) = F(x, \alpha_1, \tau_1)$  и

$$P(Y < y) = F(y, \alpha_2, \tau_2), \quad \text{где } F(z, \alpha, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{z - \alpha}{\tau}\right).$$

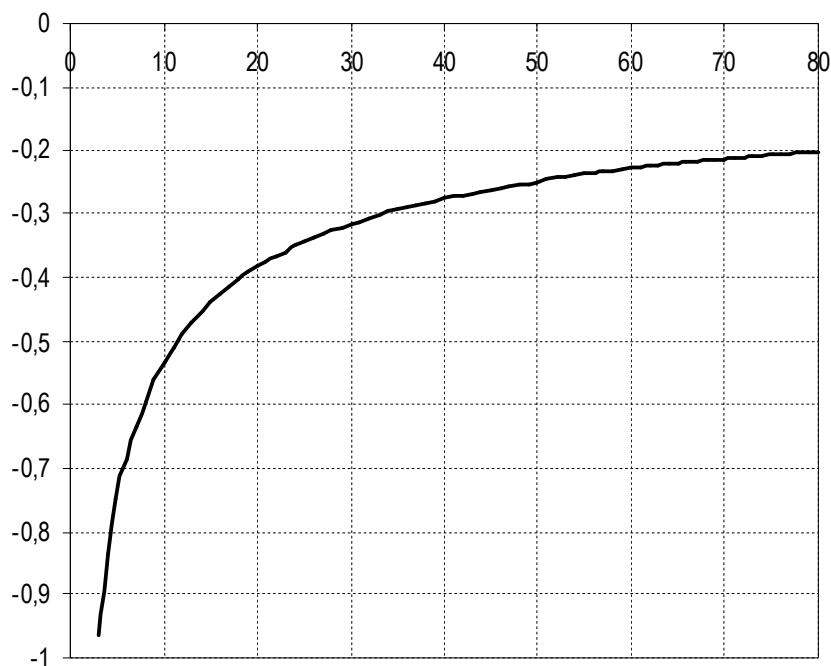


Рис. 6. График зависимости МНК-оценки коэффициента  $\rho$ -Спирмена от параметра  $n$

Тогда функция  $H(x, y) = C_{Gr}(F(x, \alpha_1, \beta_1), F(y, \alpha_2, \beta_2); n)$  является функцией совместного распределения случайных величин  $X$  и  $Y$ , маргинальные распределения которых равны  $F(x, \alpha_1, \beta_1)$  и  $F(y, \alpha_2, \beta_2)$ , соответственно<sup>22</sup>. При этом взаимосвязь между переменными  $X$  и  $Y$  будет описываться копулой Грabbса.

Для вычисления значений функции совместного распределения  $H(x, y)$  был разработан алгоритм вычисления значений ко-

пула-функции  $C_{Gr}(u, v)$  по формулам (2) - (4). Для приближенного вычисления интегралов в формулах (2) и (3) использовалась квадратурная формула Гаусса, узлами которой являлись корни многочлена Лежандра восьмой степени<sup>23</sup>.

Результаты расчетов функции совместного распределения  $H(x, y)$  для случая  $n = 5$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\tau_1 = 1$  и  $\tau_2 = 10$  приведены на рис. 7.

Кроме того, были выполнены вычисления плотности совместного распределения  $h(x, y) =$

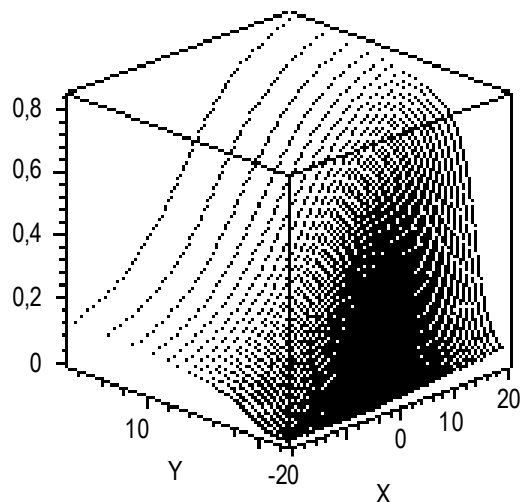


Рис. 7. График функции  $H(x, y)$  двух случайных переменных, связанных копулой Грabbса ( $n = 5$ )

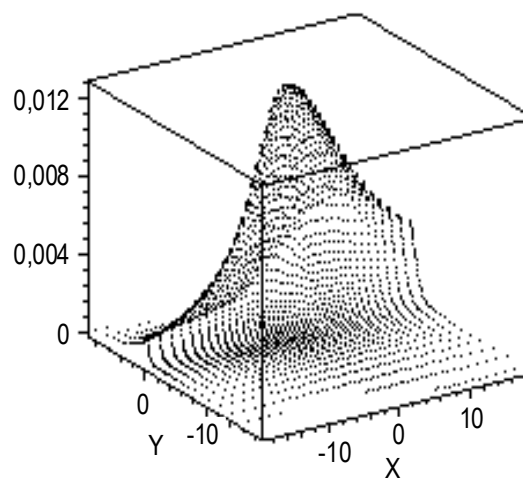


Рис. 8. График совместной плотности распределения  $h(x, y)$  двух случайных переменных, связанных копулой Грabbса ( $n = 5$ )

$= H''_{xy}(x, y)$ . Результаты расчетов совместной плотности  $h(x, y)$  для случая  $n = 5$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\tau_1 = 1$  и  $\tau_2 = 10$  и приведены на рис. 8.

### Заключение

В работе исследована новая однопараметрическая копула-функция, полученная методом инверсии из совместного распределения стандартизированных минимума и максимума. При этом предполагалось, что стандартизированные минимум и максимум вычисляются по нормально распределенной выборке объема  $n$ . Изучено влияние параметра копулы  $n$  на силу зависимости между случайными величинами, заключенными в копулу Граббса. Для этого был выполнен графический анализ копулы посредством скаттерплотов. Найдено, что с ростом параметра  $n$  наблюдается существенное падение силы зависимости случайных переменных, связанных копулой Граббса. В частности, для  $4 < n < 14$  можно считать, что имеет место тесная отрицательная взаимосвязь случайных переменных, “упакованных” в копулу Граббса, ибо коэффициент ранговой корреляции Спирмена для копулы Граббса удовлетворял условию  $-1 < \rho < -0,5$ . Аппроксимация для коэффициента  $\rho$ -Спирмена, построенная методом наименьших квадратов, показала хорошие прогностические свойства для случая  $4 < n < 80$ .

*Автор выражает искреннюю благодарность профессору Габидулле Рабадановичу Хасаеву за конструктивные замечания и предложения, сделанные им при чтении рукописи.*

<sup>1</sup> Фантаццини Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций // Прикладная эконометрика. 2011. № 22 (2). С. 98-134. № 22 (2).

<sup>2</sup> Там же.

<sup>3</sup> Там же.

<sup>4</sup> Благовещенский Ю.Н. Основные элементы теории копул // Прикладная эконометрика. 2012. № 26 (2). С. 113-130.

<sup>5</sup> Пеникас Г.И. Модели “копула” в управлении валютным риском банка // Прикладная эконометрика. 2010. № 17 (1). С. 63-87.

<sup>6</sup> Фантаццини Д. Указ. соч.

<sup>7</sup> См.: Пеникас Г.И., Симакова В.Б. Управление процентным риском на основе копулы-GARCH

моделей // Прикладная эконометрика. 2009. № 13 (1). С. 3-36; Бродский Б.Е., Пеникас Г.И., Сафарян И.А. Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул // Прикладная эконометрика. 2009. № 16 (4). С. 3-15; Пеникас Г.И. Модели “копула” в управлении валютным риском банка // Прикладная эконометрика. 2010. № 17 (1). С. 63-87; Его же. Модели „копула” в задачах хеджирования ценового риска // Прикладная эконометрика. 2011. № 22 (2). С. 3-21; Его же. Модели “копула” в управлении рыночным риском российских банков : дис. ... канд. экон. наук. М., 2011. 166 с.; Его же. Иерархические копулы в моделировании рисков инвестиционного портфеля, Прикладная эконометрика. 2014. № 35 (3). С. 18-38.

<sup>8</sup> Пеникас Г.И. Модели “копула” в управлении валютным риском банка // Прикладная эконометрика. 2010. № 17 (1). С. 63-87.

<sup>9</sup> Там же.

<sup>10</sup> Благовещенский Ю.Н. Указ. соч.

<sup>11</sup> См.: Фантаццини Д. Указ. соч.; Его же. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. II // Прикладная эконометрика. 2011. № 23 (3). С. 98-132; Его же. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. II // Прикладная эконометрика. 2011. № 23 (3). С. 98-132.

<sup>12</sup> Айвазян С.А., Фантаццини Д. Эконометрика-2: продвинутый курс с приложениями в финансах. М. : Магистр: Инфра-М, 2014. 944 с.

<sup>13</sup> Nelsen R.B. An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics // New York: Springer-Verlag, 2006.

<sup>14</sup> Балаев А.И. Составление портфелей ценных бумаг на основе прогнозирования совместной функции распределения доходностей : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2014. 307 с.

<sup>15</sup> Zhang J., Keming Y. The null distribution of the likelihood-ratio test for one or two outliers in a normal sample // An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research. 2006. № 15 (1). С. 141-150.

<sup>16</sup> Ширяева Л.К. О нулевом и альтернативном распределении статистики критерия наибольшего по абсолютной величине нормированного отклонения // Известия вузов. Математика. 2014. № 10. С. 62-78.

<sup>17</sup> Nelsen R.B. Указ. соч.

<sup>18</sup> Ширяева Л.К. Указ. соч.

<sup>19</sup> Nelsen R.B. Указ. соч.

<sup>20</sup> Фантаццини Д. Моделирование многомерных распределений...

<sup>21</sup> Там же.

<sup>22</sup> Nelsen R.B. Указ. соч.

<sup>23</sup> Микеладзе М.Ш. Численные методы математического анализа. М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1953.

Поступила в редакцию 14.05.2015 г.