УДК 338.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА КРИВОЙ ОБУЧЕНИЯ

© 2015 О.В. Павлов*

Ключевые слова: эффект кривой обучения, динамическое программирование, оптимальные объемы производства.

Анализируются решения динамических задач планирования объемов производства с учетом эффекта кривой обучения. Рассматриваемые задачи формализуются как задачи оптимального управления дискретной системой. Представлены численные решения задач с помощью метода динамического программирования Беллмана. Приводится исследование зависимости влияния параметров модели на оптимальные решения задач.

В процессе производственной деятельности промышленного предприятия проявляется эффект кривой обучения, который заключается в том, что затраты времени на выполнение многократно повторяющихся задач снижаются. Эффект кривой обучения впервые был замечен инженером Т. Райтом в авиастроительной отрасли США[1]. При каждом удвоении кумулятивного объема производства производительность труда работников увеличивается на 10-15 %. Под кумулятивным (суммарным) объемом производства понимается количество изделий, изготовленных с начала производства продукции нарастающим итогом. Близкой к кривой обучения является кривая опыта, обнаруженная сотрудниками корпорации BGG. Их исследования показали, что при удвоении объемов производства затраты на единицу продукции (удельные затраты) снижаются на 20-30 %[2]. Примеры эффекта кривой обучения в производственной деятельности промышленных предприятий приводятся в работе Ш. Майталя[3].

Снижение удельных затрат при увеличении кумулятивного объема производства делает актуальными постановки задач динамической оптимизации. Задачи заключаются в поиске оптимального распределения объемов производства по временным периодам при заданных временных, производственных и финансовых ограничениях с целью достижения экстремума выбранного экономического критерия[4]. Постановки и решения ряда динамических оптимизационных задач обучения работников в процессе их деятельности приводятся в работе Д.А. Новикова[5].

Динамика производственной деятельности промышленного предприятия описывается дискретным уравнением

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = 1, n, \qquad (1)$$

где x_t - кумулятивный объем производства за t-й временной период, t - номер временного периода, u_t - объем производства в периоде, n - число рассматриваемых периодов производственной деятельности предприятия (горизонт планирования).

Выбор объема производства u_t в периоде t является управлением менеджмента предприятия.

В начальный период известно количество продукции, уже произведенное предприятием:

$$x_0 = X_0. \qquad (2)$$

В конечный период кумулятивный объем произведенной продукции должен быть равен заданному:

$$x_n = X_0 + R, \qquad (3)$$

где R - заданное количество продукции.

На объем производства в каждом периоде t наложены следующие ограничения:

* Павлов Олег Валерьевич, кандидат технических наук, доцент, декан факультета экономики и управления Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). E-mail: pavlov@ssau.ru.

$$Q^{\min} \le u_t \le Q^{\max}, \quad t = 1, n, \qquad (4)$$

где $Q^{\min}$ - минимальный объем производства с учетом технологических и логистических требований, $Q^{\max}$ - максимальная производственная мощность оборудования промышленного предприятия.

Затраты в периоде t определяются как произведение удельных затрат продукции c_t и объема производства в этом периоде u_t:

$$C_t = c_t u_t. \qquad (5)$$

Динамика изменения удельных затрат продукции от кумулятивного объема производства описывается степенной зависимостью

$$c_t = a x_{t-1}^{-\gamma}, \qquad (6)$$

где a - затраты на производство первого изделия, γ - скорость обучения.

Кривая, построенная на основе формулы (6), называется кривой обучения. Скорость обучения характеризует темп снижения удельных затрат промышленного предприятия при увеличении кумулятивного объема производства.

Подставляя выражение (6) в формулу (5), получаем затраты промышленного предприятия на шаге t:

$$C_t = a x_{t-1}^{-\gamma} u_t.$$

Эффект обучения, выражающийся в динамическом снижении удельных затрат вследствие увеличения кумулятивного объема производства (6), приводит к постановке динамических задач планирования.

Сформулируем динамические задачи планирования производственной деятельности с учетом эффекта кривой обучения.

Задача о минимизации затрат

Критерием принятия управленческого решения является минимизация дисконтированных кумулятивных (суммарных) затрат промышленного предприятия:

$$J = \sum_{t=1}^{n} \frac{a x_{t-1}^{-\gamma} u_t}{(1+r)^t} \to \min, \qquad (7)$$

где r - ставка дисконтирования, принятая руководством предприятия.

Под кумулятивными (суммарными) затратами промышленного предприятия понимается сумма затрат нарастающим итогом с начала производства продукции.

Задача заключается в поиске оптимальных объемов производства u_t^{opt}, $t = 1, n$, удовлетворяющих ограничению (4), которые осуществляют перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и минимизируют дисконтированные кумулятивные затраты предприятия (7).

Постановка данной задачи и ее решение приводятся в работе автора[6].

Задача о максимизации прибыли

В качестве целевой функции руководства предприятия рассматривается максимизация дисконтированной кумулятивной (суммарной) прибыли:

$$\pi = \sum_{t=1}^{n} \frac{p_{t-1} u_t - a x_{t-1}^{-\gamma} u_t}{(1+r)^t} \to \max, \qquad (8)$$

где p_{t-1} - цена продукции промышленного предприятия.

Такая постановка задачи возможна для предприятия, которое выходит на рынок с новым инновационным продуктом и является монополистом. Цена новой инновационной продукции зависит от кумулятивного объема производства в соответствии с законом спроса и предложения:

$$p_{t-1} = b - d x_{t-1}, \qquad (9)$$

где b, d - параметры кривой спроса и предложения.

Подставляя (9) в (8), получим окончательное выражение для целевой функции:

$$J = \sum_{t=1}^{n} \frac{(b - d x_{t-1}) u_t - a x_{t-1}^{-\gamma} u_t}{(1+r)^t}. \qquad (10)$$

Задача заключается в поиске оптимальных объемов производства u_t^{opt}, $t = 1, n$, удовлетворяющих ограничению (4), которые осуществляют перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и максимизируют суммарную дисконтированную прибыль предприятия (10). В данной задаче под R в ограничении (4) понимается суммарный спрос на продукцию.

Задача о максимизации суммарного объема производства

Критерием принятия управленческого решения является максимизация кумулятивного объема производства за рассматриваемое число временных периодов n:

$$J = x_n \to \max. \tag{11}$$

Дисконтированные кумулятивные затраты предприятия ограничены имеющимся финансовым ресурсом F:

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{a x_{t-1}^{-\gamma} u_t}{(1+r)^t} \le F. \tag{12}$$

Задача заключается в поиске оптимального управления u_t^{opt}, $t = 1, n$, удовлетворяющего ограничению (4), которое осуществляет перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) с выполнением ограничения на финансовый ресурс (12) и максимизирует суммарный объем производства в конечном периоде (11).

Задача о быстродействии

В качестве целевой функции руководства предприятия рассматривается минимизация количества периодов реализации проекта:

$$J = n \to \min. \tag{13}$$

Задача заключается в поиске объемов производства u_t^{opt}, $t = 1, n$, в соответствии с ограничением (4), которое осуществляет перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) с выполнением ограничения на финансовый ресурс (12) и минимизирует количество временных периодов (13).

Сформулированные задачи являются задачами оптимального управления. Для решения задач применялся метод динамического программирования Беллмана[7]. Наибольший интерес представляют решения задач минимизации затрат и максимизации прибыли, так как решения задач о быстродействии и максимизации суммарного объема производства тривиальны.

Решение динамической задачи минимизации затрат

Задача решалась на примере освоения нового изделия "Кассета" на предприятии ОАО "Салют". По данным предприятия построена эконометрическая модель трудоемкости нового изделия "Кассета"[8]:

$$c_t = 42{,}64 x_t^{-0{,}29}.$$

Для решения задачи использовались следующие данные: заданный суммарный объем производства детали "Кассета" $R = 400$ деталей, количество временных периодов $n = 12$, объем произведенной продукции в начальный период $x_0 = 1$ шт., минимальный объем производства $Q^{\min} = 10$ деталей, максимальная производственная мощность оборудования $Q^{\max} = 50$ деталей. С учетом применяемости детали в готовом изделии объем производства в каждый период должен быть кратен 10.

Математическая модель динамической задачи минимизации затрат в процессе производства детали "Кассета" имеет вид

$$\begin{aligned}
&x_t = x_{t-1} + u_t,\ t = 1, n,\\
&x_0 = X_0,\\
&x_n = X_0 + R,\\
&Q^{min} \le u_t \le Q^{max},\ \ t = 1, n,\\
&J = \sum_{t=1}^{n} \frac{42{,}64 x_t^{-0{,}29} u_t}{(1+r)^t} \to \min.
\end{aligned}$$

На рис. 1 представлено влияние скорости обучения γ на оптимальные траектории суммарного объема производства при постоянной ставке дисконтирования $r = 0$.

Из анализа рис. 1 можно сделать вывод, что оптимальной стратегией является постепенное увеличение объемов производства от минимально возможного до максимального. С увеличением скорости обучения γ оптимальная траектория суммарного объема производства становится более "выпуклой".

Проведенные в работе исследования влияния параметра a (затраты на производство первой детали) на оптимальную траекторию суммарного объема производства показали, что затраты на производство первой детали не влияют на оптимальную траекторию суммарного объема производства.

На рис. 2 представлено влияние ставки дисконтирования на оптимальные траектории суммарного объема производства при постоянной скорости обучения $\gamma = -0{,}29$.

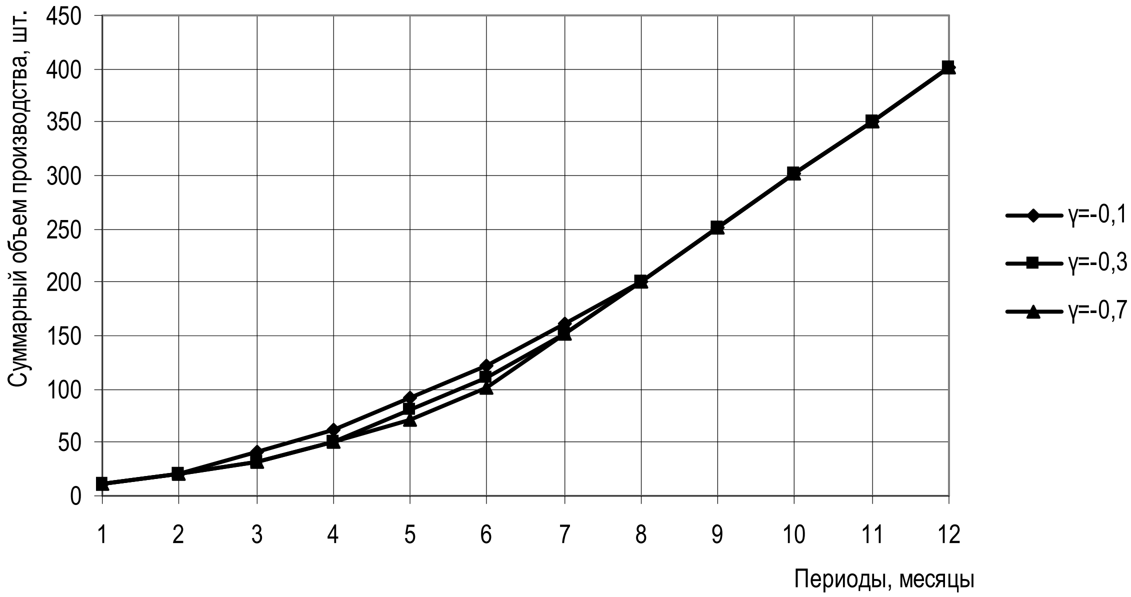

Рис. 1. **Влияние скорости обучения на оптимальные траектории объемов производства**

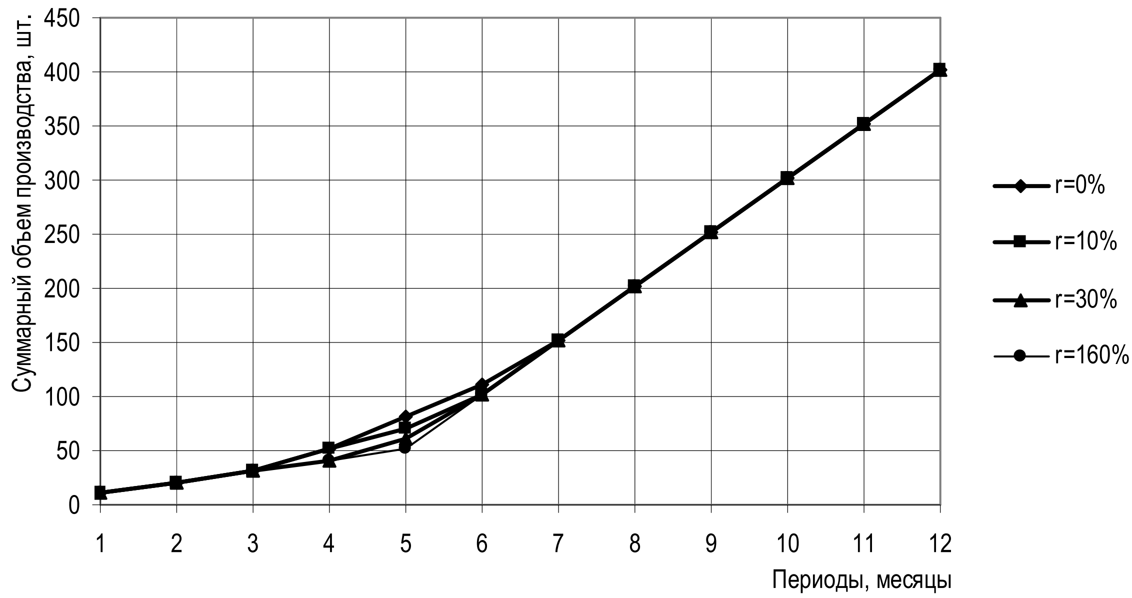

Рис. 2. **Влияние ставки дисконтирования на оптимальные траектории объемов производства**

Из анализа рис. 2 можно сделать вывод, что с увеличением ставки дисконтирования оптимальная траектория суммарного объема производства становится более "выпуклой". При больших значениях ставки дисконтирования ($r \geq 160\%$) оптимальная стратегия становится релейной: в начальных периодах выгодно выбирать минимальный объем производства, а в конечных периодах - максимальный.

Решение динамической задачи максимизации прибыли

Для решения задачи использовались следующие данные: суммарный спрос на продукцию $R = 400$ шт., количество временных периодов $n = 12$, объем произведенной продукции в начальный период $x_0 = 1$ шт., минимальный объем производства $Q^{\min} = 10$ изделий, максимальная производственная мощность оборудования $Q^{\max} = 50$ изделий. С учетом условий поставок объем производства в каждый период должен быть кратен 10.

Математическая модель динамической задачи максимизации прибыли имеет вид

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = 1, n,$$

$$x_0 = X_0,$$

$$x_n = X_0 + R,$$

$$Q^{min} \leq u_t \leq Q^{max}, \quad t = 1, n,$$

$$J = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left(10000 - 2x_{t-1}\right)u_t - 4010{,}3x_{t-1}^{-0{,}29}u_t}{\left(1+r\right)^t} \to$$

$$\to \max.$$

На рис. 3 представлено влияние скорости обучения γ на оптимальные траектории объема производства продукции при постоянной ставке дисконтирования $r = 0$.

Оптимальной стратегией является постепенное увеличение объемов производства от минимальных в начальных периодах до максимальных в конечных периодах. С увеличением скорости обучения γ оптимальная траектория суммарного объема производства становится более “выпуклой”.

На рис. 4 представлено влияние ставки дисконтирования на оптимальные траектории суммарного объема производства продукции при постоянной скорости обучения γ = -0,29 в задаче максимизации прибыли.

Анализируя рис. 4, приходим к выводу, что влияние ставки дисконтирования в задаче максимизации прибыли приводит к существенному изменению оптимальных траекторий суммарных объемов производства. Чем больше ставка дисконтирования, тем большие объемы продукции выгодно производить в начальные периоды и меньшие в конечные. При больших значениях ставки дисконтирования оптимальная стратегия становится ре-

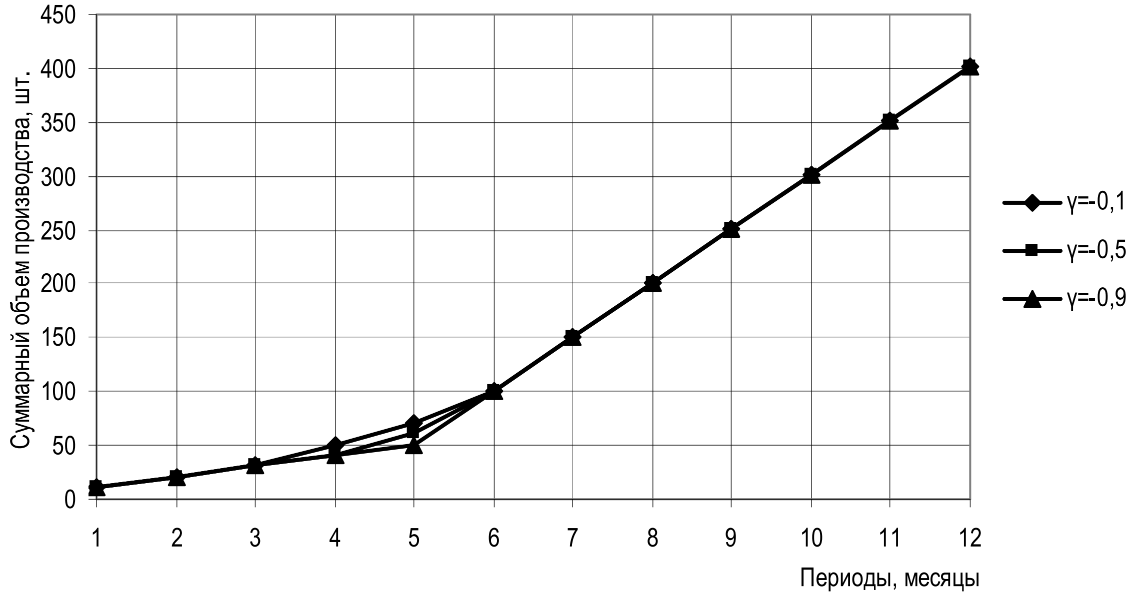

Рис. 3. **Влияние скорости обучения на оптимальные траектории объемов производства**

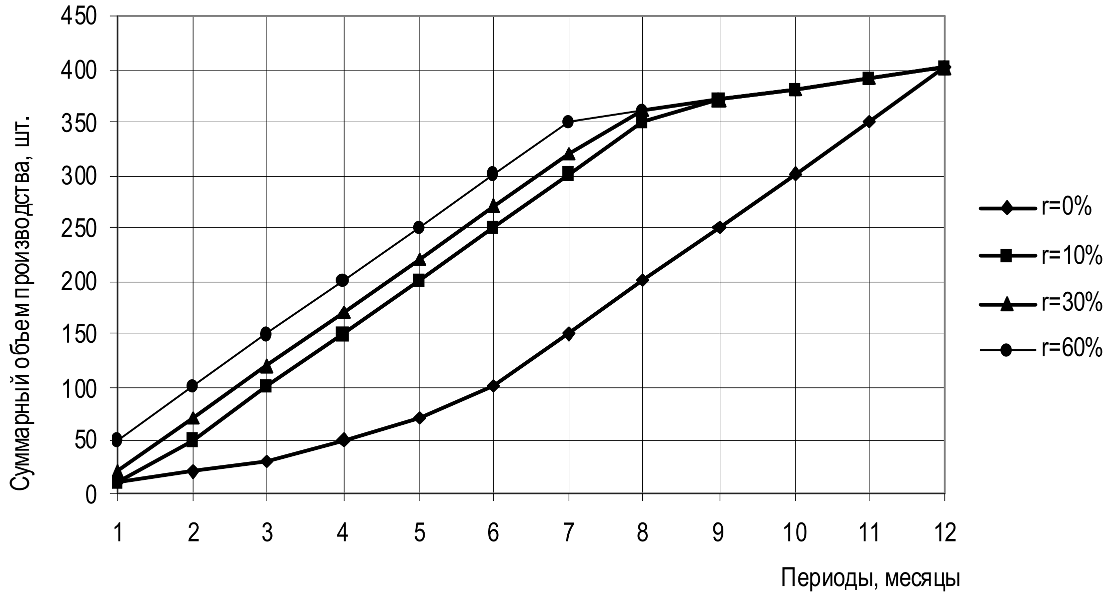

Рис. 4. **Влияние ставки дисконтирования на оптимальные траектории объемов производства**

лейной: в начальных периодах выгодно выбирать максимальный объем производства, а в конечных периодах - минимальный.

Таким образом, проведенное в настоящей работе исследование позволило сделать следующие выводы:

1. Оптимальной стратегией без учета дисконтирования является постепенное увеличение объемов производства от минимальных в начальных периодах до максимальных в конечных периодах.

2. Скорость обучения влияет на оптимальную стратегию выбора объемов производства. С увеличением скорости обучения γ оптимальная траектория суммарного объема производства становится все более "выпуклой".

3. Затраты на производство первой детали a не влияют на оптимальную траекторию суммарного объема производства.

4. Влияние ставки дисконтирования в различных задачах оказывает противоположное действие.

4.1. В задаче максимизации прибыли с увеличением ставки дисконтирования оптимальная траектория суммарного объема производства становится более "выпуклой". При больших значениях ставки дисконтирования оптимальная стратегия становится релейной: в начальных периодах выгодно выбирать минимальный объем производства, а в конечных периодах -максимальный.

4.2. В задаче максимизации прибыли влияние ставки дисконтирования существенно изменяет оптимальные траектории суммарных объемов производства. Чем больше ставка дисконтирования, тем большие объемы продукции выгодно производить в начальные периоды и меньшие в конечные. При больших значениях ставки дисконтирования оптимальная стратегия становится релейной: в начальных периодах выгодно выбирать максимальный объем производства, а в конечных периодах - минимальный.

---

[1] *Wright T.P.* Factors affecting the cost of airplanes // Journal of the aeronautical sciences. 1936. Vol. 3. № 4. P. 122-128.

[2] Стратегии, которые работают: подход BCG / под ред. И.В. Лазуковой. М. : Манн, Иванов и Фебер, 2005.

[3] *Майталь Ш.* Экономика для менеджеров: десять важных инструментов для руководителей. М. : Дело, 1996.

[4] *Павлов О.В.* Динамические задачи планирования в управлении проектами // Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах. СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн "ЦНИИ "Электроприбор"», 2012. С. 1055-1058.

[5] *Новиков Д.А.* Модели обучения в процессе работы // Управление большими системами. 1997. № 19. С. 5-22.

[6] *Павлов О.В., Рясная Т.Н.* Численное решение задачи планирования производства при динамическом снижении трудоемкости // Вестник СГАУ. Самара, 2012. № 6 (37). С. 126-132.

[7] *Беллман Р.* Динамическое программирование. М. : Изд-во иностранной литературы, 1960.

[8] *Павлов О.В., Рясная Т.Н.* Динамическое планирование объемов производства в период освоения новой продукции // Экономические науки. 2013. № 4 (101). С. 162-166.

Поступила в редакцию 29.12.2014 г.