УДК 519.71:005.8

ГРАФОВЫЙ МЕТОД МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫБОРА УПРАВЛЕНИЯ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КОРПОРАЦИЙ

© 2014 М.И. Гераськин*

Ключевые слова: иерархическая вертикально-интегрированная система, многокритериальная оптимизация, множество Парето, метакритерий, принцип максимина, рентабельность.

Проведен анализ современного состояния методов многокритериальной оптимизации применительно к решению задач формирования управления иерархическими организационно-экономическими системами вертикально-интегрированного типа. Разработан и обоснован метод выбора единственного вектора управления из множества Парето-оптимальных управлений путем формирования агрегированного критерия (метакритерия) на основе графового анализа этого множества. Разработаны модели учета приоритетов критериев на базе сравнительного анализа рентабельностей агентов системы.

Введение

Современный корпоративный сектор экономики России в значительной мере состоит из интегрированных структур. Имеют место такие формы интеграции предприятий [6, 7], как:

♦ имущественная (жесткая) интеграция, основанная на участии в капитале, приводящая к созданию таких форм, как холдинги с дочерними и зависимыми обществами, распределенные холдинги, имеющие в виде центра корпорацию, и структуры взаимного участия в капитале;

♦ неимущественная (мягкая) интеграция в виде контроля над ресурсами или продуктами либо в виде добровольной централизации участниками тех или иных функций управления через некоторый метацентр.

В результате реализации этих форм образуется система корпораций, представляющая собой поликорпоративную систему для случая неимущественной интеграции, механизмы согласования взаимодействий элементов которой рассмотрены в [3] как для неиерархической организационно-экономической системы на основе распределения дополнительного эффекта взаимодействий. Однако при этом не рассматривались состояния систем корпораций, в которых отсутствует дополнительный эффект взаимодействий и которые могут возникать, например, при вертикальной интеграции в системе "производственный сектор - сектор оптовых продаж - сектор розничных продаж". Также предложенные в [3] механизмы неэффективны при согласовании взаимодействия в иерархических системах, образующихся вследствие имущественной интеграции.

Рассмотрим особенности функционирования организационно-экономических систем корпораций, позволяющие при формировании управления использовать аппарат теории многокритериальной оптимизации. Во-первых, системы корпораций являются мультиагентными, причем входящие в них агенты, даже являясь внутрикорпоративными подразделениями, функционируют как обособленные хозяйственные единицы; следовательно, агенты, варьируя некоторые параметры управления, достигают собственных целей; поэтому систему можно формально представить в виде вектора критериев как функций параметров управления. Во-вторых, цели агентов, входящих в корпоративную систему, как правило, противоречивы: в случае вертикально-интегрированной системы "производственный сектор - сектор оптовых продаж - сектор розничных продаж" противоречивость критериев следует из ограниченности дохода (прибыли) уровнем спроса на конечный продукт (услугу); для горизонтально-интегрированной системы, в которой секторы производства (сбыта) технологически не связаны между собой потоками то-

* Гераськин Михаил Иванович, доктор экономических наук, профессор, зав. кафедрой математических методов в экономике Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). E-mail: innovation@ssau.ru.

варов или услуг и объединены имущественной иерархией, также имеет место ограниченный совокупный спрос, т.е. суммарный доход корпоративной системы, распределяемый между агентами, ограничен. В-третьих, несмотря на указанную противоречивость целей, выполнение хозяйственных функций невозможно без поддержания целостности корпоративной системы, поэтому проблема согласования взаимодействующих элементов в таких системах остается актуальной и предопределяет нахождение некоторого компромиссного состояния исходя из какого-либо общекорпоративного критерия (метакритерия).

Анализ современного состояния многокритериальной оптимизации

Математические методы и процедуры многокритериального выбора и принятия решений широко исследованы применительно к специфике экономических проблем. Многокритериальный выбор в отличие от оптимизации функционирования организационно-экономических систем на основе одного критерия эффективности означает переход к принципиально иному классу задач [10]. В самом деле, многокритериальная задача формально не имеет единственного решения, если базироваться только на заключенной в задаче информации; более того, такая задача не имеет даже однозначно определенного множества решений.

В связи с этим современный уровень развития многокритериальной оптимизации выражается в виде двух подходов: первый состоит в формировании определенного тем или иным образом (эффективность по Парето, эффективность по Слейтеру) множества решений задачи; второй заключается в нахождении единственного решения (как правило, из указанных множеств) из условия оптимальности дополнительного критерия (метакритерия), введенного в процессе решения задачи лицом, принимающим решения (ЛПР). Второй подход, как правило, выражается в агрегировании исходных критериев задачи, поскольку метакритерий образуется путем каких-либо преобразований этих критериев.

Рассмотрим принципы формирования ***множества Парето (множества Слейтера)***. К множеству Парето (Π) относятся [22, 23] такие варианты решений многокритериальной задачи u^*, которые не доминируются другими вариантами с точки зрения всей совокупности критериев, т.е.

$$\Pi = \left\{ u^* \in U \middle| \; \exists u \in U : R_k[u] \geq R_k[u^*], \right.$$

$$\left. k \in K, u \neq u^* \right\}, \qquad (1)$$

где u - вектор управления организационно-экономической системой; U - допустимая область управлений с учетом ограничений; $R_k[u]$, $k = 1, \ldots, K$ - вектор критериев оптимальности. Множество Слейтера (С) включает в себя значения вектора управлений, которые не доминируются другими вариантами решения задачи, а также равноценные по совокупности критериев векторы:

$$C = \left\{ u^* \in U \middle| \; \exists u \in U : R_k[u] > R_k[u^*], \right.$$

$$\left. k \in K, u \neq u^* \right\}. \qquad (2)$$

Множество Парето является сужением множества Слейтера и более строго выражает принцип предпочтительности входящего в него вектора управления по сравнению с другими, поэтому, как правило, (1) является при данном подходе основным принципом решения многокритериальной задачи.

Формирование множества Парето, в общем случае непрерывного, осуществлялось дискретными методами, исторически первым из которых был анализ “стоимость-эффективность” [35]: на основе объективных моделей стоимости и эффективности рассматриваемой организационно-экономической системы определяют вектор управления, либо минимизирующий стоимость при фиксированной эффективности, либо максимизирующий эффективность при фиксированной стоимости. Современные варианты этого подхода выступают в форме методов [16, 25, 29, 30] последовательных уступок, последовательного игнорирования, ведущего критерия [41] и сводятся к анализу дискретного множества альтернатив [32]. Во всех этих методах один из частных критериев фигурирует в виде ограничения, т.е., как таковой, многокритериальный выбор не производится.

Однако анализ множества Парето есть лишь первый этап на пути поиска решения [1, 23], поскольку на практике проблема управления организационно-экономическими системами заключается в выборе единственного варианта функционирования, причем на основе объективной информации.

Рассмотрим базовые ***принципы агрегирования*** исходных критериев задачи, приводящего к выбору единственного решения. Введение дополнительного критерия (метакритерия) само по себе переопределяет субъективный подход. Научная база теории многокритериального выбора была разработана Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном, которые показали [17], что если предпочтения экономических субъектов по отношению к определенным результатам их деятельности удовлетворяют принципам (аксиомам) [39] рефлективности, связности, транзитивности и некоторым другим, то их поведение может рассматриваться как ***максимизация ожидаемой полезности***. Современную форму такого подхода представляет многокритериальная теория полезности [26, 28, 34, 40], в рамках которой совокупная полезность определяется как взвешенная сумма (агрегированный критерий) полезностей отдельных агентов (частных полезностей):

$$R = \sum_{k=1}^{K} \upsilon_k R_k(u) \text{ при } \sum_{k=1}^{K} \upsilon_k = 1,$$

где υ_k - весовые коэффициенты критериев ($0 < \upsilon_k < 1$), определяемые различными способами [33]: отношений, компенсации, цены критериев, взвешенной полезности.

Разработаны также другие варианты формирования агрегированных критериев [2, 8, 9, 14, 24]: метод главного критерия, в котором в качестве совокупной полезности фигурирует критерий одного агента; симулирующие комплексные критерии, в которых более значимый частный критерий оказывает большее влияние на комплексный критерий; штрафующие комплексные критерии, в которых более значимый частный критерий более существенно лимитирует комплексный критерий; степенные (мультипликативные) комплексные критерии [37, 42], в которых предполагается зависимость результатов выбора по одному частному критерию от результатов выбора по другому критерию; скаляризация на основе ортогонально нормированных критериев [36] и др. Существуют человеко-машинные варианты этого подхода в виде процедуры Дайера-Джиофириона [5], при которой ЛПР определяет градиент метакритерия, и метода Зайонца-Валлениуса [30], основанного на сужении множества значений вектора весовых коэффициентов также с учетом предпочтений ЛПР. Обзор современного состояния человеко-машинных процедур представлен в [11].

Особый тип методов агрегирования, развивающих штрафующе-стимулирующие подходы, основан на применении метакритерия в виде расстояния (в некоторой метрике) между Парето-оптимальными значениями критериев и предопределенным ЛПР значением вектора критериев: метод "идеальной точки" [27], предполагающий минимизацию суммы квадратов отклонений компонентов вектора критериев от заданного ЛПР "идеального" значения вектора; выбор "по образцу" [15], при котором минимизируются нормированные отклонения от заданных значений критериев.

Также развитием штрафующе-стимулирующих подходов является метакритерий в виде максимина (минимакса), на основе которого выбирается управление [13]:

$$u = arg \max_{u \in U} \min_{k \in K} R_k[u]. \quad (3)$$

Это единственный агрегированный критерий, для которого строго обоснована [4] Парето-оптимальность управления, удовлетворяющего (3). Также доказано [23], что если частные критерии нормализованы:

$$\overline{R}_k[u] = \frac{R_k[u]}{R_k^*}, k \in K,$$

$$R_k^* = \max_{u \in U} R_k[u], \quad (4)$$

то выбранное по условию (3) управление обеспечивает так называемую "равную эффективность"

$$\overline{R}_i[u] = \overline{R}_j[u], \ i, \ j \in K. \quad (5)$$

Таким образом, принципы агрегирования сводят многокритериальный выбор к оценке результатов функционирования организационно-экономических систем по некоторому комплексному критерию (метакритерию); однако лишь в исключительных случаях для реально существующих мультиагентных систем возможно существование такого критерия, как экономического показателя системы. Вторым недостатком такого подхода является, как правило, отсутствие объективной информации о значимости частных критериев в организационно-экономических системах [43].

Поэтому актуально следующее направление совершенствования существующих методов многокритериального выбора: формирование объективно обоснованного метакритерия, учитывающего всю совокупность частных критериев и обеспечивающего выбор единственного и удовлетворяющего практически важным ограничениям варианта функционирования организационно-экономической системы.

Графовая модель формирования метакритерия

Представим множество управлений u_k^*, сформированное по условиям (4), включенное в множество Парето по определению (1), в виде вершин графа на рис. 1а (так называемый граф Парето-оптимальных управлений).

Переход между вершинами u_n^*, u_m^* характеризуется параметром

$$h_k^{nm} = \frac{R_k\left[u_m^*\right] - R_k\left[u_n^*\right]}{R_k^*}, \text{n, m} \in K, \quad (6)$$

отражающим относительное изменение k-го критерия к его максимальному значению при переходе управляемой системы от управления u_n^* к управлению u_m^*. В случае $h_k^{nm} > 0$ управление u_m^* является более предпочтительным по критерию R_k по сравнению с управлением u_n^*, в противном случае более предпочтительно управление u_n^*.

Определим веса дуг графа как алгебраическую сумму относительных изменений частных критериев при переходе от управления u_n^* к управлению u_m^*:

$$S^{nm} = \sum_{k=1}^{K} h_k^{nm}, \ \text{n, m} \in K. \quad (7)$$

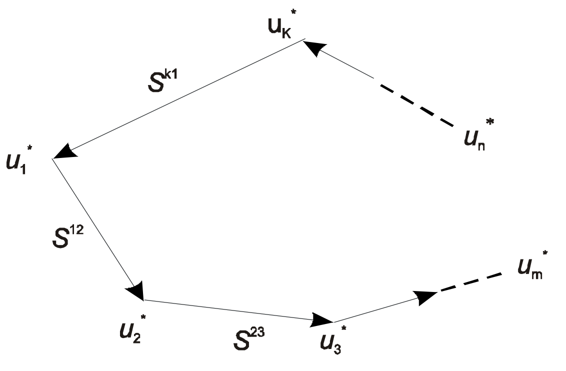
Вес S^{nm} представляет собой векторную характеристику дуги (перехода) от управления u_n^* к управлению u_m^*: при $S^{nm}>0$ управление u_m^* является более предпочтительным по векторному критерию, чем управление u_n^*, так как суммарный прирост эффективности превышает суммарные потери эффективности *без учета относительной значимости* критериев.

Выражение для параметров S^{nm} через нормализованные значения критериев получим, подставив (4) в (7):

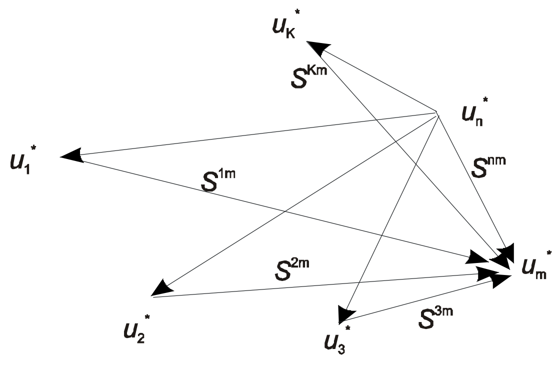
$$S^{nm} = \sum_{k=1}^{K} h_k^{nm} = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k\left[u_m^*\right] - R_k\left[u_n^*\right]}{R_k^*} =$$

$$= \sum_{k=1}^{K}\left(\overline{R}_k\left[u_m^*\right] - \overline{R}_k\left[u_n^*\right]\right), \ \text{n,m} \in K. \quad (8)$$

В случае неравнозначности критериев, определяемой вектором коэффициентов зна-



(а)



(б)

Рис. 1. **Граф Парето-оптимальных управлений** чимости υ_k, $k = 1,...,K$, соответствующее выражение примет вид

$$S^{nm} = \sum_{k=1}^{K} \upsilon_k \left(\overline{R}_k \left[u_m^* \right] - \overline{R}_k \left[u_n^* \right] \right),$$

$$n, m \in K. \quad (9)$$

Некоторая вершина графа u_n^* (рис. 1б) комплексно оценивается набором исходящих из нее дуг; количественно этот комплекс оценим параметром

$$T^m = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{K} S^{jm}, \ m \in K, \quad (10)$$

который представляет собой сумму относительных изменений критериев системы при переходе к управлению u_m^* от других Парето-оптимальных управлений.

Получим выражение для параметров T^m через нормализованные значения критериев, подставив (8) в (10):

$$T^m = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{K} \sum_{k=1}^{K} \left(\overline{R}_k \left[u_m^* \right] - \overline{R}_k \left[u_j^* \right] \right) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{K} \sum_{k=1}^{K} \overline{R}_k \left[u_m^* \right] - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{K} \sum_{k=1}^{K} \overline{R}_k \left[u_j^* \right] =$$

$$= (K-1) \sum_{k=1}^{K} \overline{R}_k \left[u_m^* \right] - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{K} \sum_{k=1}^{K} \overline{R}_k \left[u_j^* \right]. \quad (11)$$

При неравнозначности критериев выражение примет вид:

$$T^m = (K-1) \sum_{k=1}^{K} \upsilon_k \overline{R}_k \left[u_m^* \right] -$$

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{K} \sum_{k=1}^{K} \upsilon_k \overline{R}_k \left[u_j^* \right]. \quad (12)$$

Параметр T^m является количественной характеристикой относительной предпочтительности управления u_m^* по сравнению с другими Парето-оптимальными управлениями u_k^*, $k \neq m$, $k \in K$. Поэтому параметр T^m может использоваться в качестве интегрального критерия выбора компромиссного управления из множества Парето

$$u^{opt} = \arg \max_{m \in K} T^m [u]. \quad (13)$$

Если среди Парето-оптимальных управлений существует управление, удовлетворяющее принципу максимина, то метакритерий T достигает максимума при этом управлении; если ни одно из Парето-оптимальных управлений не является компромиссно-оптимальным с точки зрения принципа максимина (в дискретном случае), то критерий T позволяет определить управление, наиболее близкое к u^0, т.е. минимизируется отклонение

$$u^{opt} = \arg \max_{m \in K} T^m - \arg \max_{u \in U} \min_{k \in K} \overline{R}_k [u].$$

Модели выбора коэффициентов значимости

Выбор коэффициентов значимости оказывает существенное влияние на результат решения задачи (13). Информация о значимости критериев формируется либо путем ретроспективного анализа функционирования организационно-экономической системы, либо на основе выбора новых целей системы с позиций сбалансированного изменения критериев [22]. Если в качестве критериев системы фигурируют прибыли агентов, то формализовать первый и второй подходы можно на основе баланса рентабельностей подразделений системы. Определим рентабельность i-го агента при некотором векторе управления в виде

$$r_i(u^j) = \frac{R_i(u^j)}{C_i} - 1,$$

$$i = 1,..., K, j = 1,..., K, \quad (14)$$

где C_i - издержки i-го агента.

Ранее широко использовался принцип равных рентабельностей агентов [18-21, 31], было доказано [12], что такой подход обеспечивает компромиссное распределение дохода между агентами организационно-экономической системы. Формально принцип равных рентабельностей для определения коэффициентов значимости выражается следующим соотношением:

$$\frac{r_i}{r_j} = \frac{\upsilon_i}{\upsilon_j} = 1, \; i = 1,\ldots,K, \; j = 1,\ldots,K,$$

откуда следует

$$r_i \upsilon_j = r_j \upsilon_i, \quad i = 1,\ldots,K, \; j = 1,\ldots,K. \qquad (15)$$

Усовершенствуем модель (15), обеспечивая целенаправленное воздействие вектора коэффициентов значимости на развитие организационно-экономической системы. Подход адаптирующих рентабельностей

$$r_i \upsilon_j = \alpha_{ij} r_j \upsilon_i, \quad i = 1,\ldots,K, \; j = 1,\ldots,K \qquad (16)$$

позволяет обеспечить возрастание показателей рентабельности последующего подразделения в цепи вертикально-интегрированной системы при

$$\alpha_{ij} > 1, \; i = 1,\ldots,K, \; j = 1,\ldots,K \qquad (17)$$

или убывание этих показателей при

$$\alpha_{ij} < 1, \quad i = 1,\ldots,K, \; j = 1,\ldots,K \qquad (18)$$

Параметр α будем называть коэффициентом стимулирования, так как в соответствии с условием (16) этот показатель характеризует отклонение формируемого решения многокритериальной задачи от принципа равных рентабельностей.

Например, при вертикальной интеграции в системе “производственный сектор - сектор оптовых продаж - сектор розничных продаж” при условии (17) коэффициенты значимости из системы (16) будут назначаться таким способом, что рентабельность производственного сектора будет ниже рентабельности сектора оптовых продаж, а рентабельность оптовых продаж - ниже, чем розничных. Этот механизм позволит повысить рентабельность и, соответственно, прибыль розничной сети холдинга, поскольку будет стимулировать такие процессы, как снижение издержек на реализацию, стимулирование продаж с помощью эффективной рекламы, подбор квалифицированного персонала по продажам и прочие методы. При условии (18) объектом стимулирования является производственное предприятие, повышение рентабельности которого обеспечивается снижением издержек, внедрением новых ресурсосберегающих технологий, оптимизацией планов производства, оптимизацией организационной структуры производственного предприятия и т.п.

Моделирование многокритериального управления в вертикально-интегрированной корпоративной системе

Рассмотрим вертикально-интегрированную систему корпорации, осуществляющей производство и реализацию оконного профиля, структурированную по принципу “производственный сектор - сектор оптовых продаж - сектор розничных продаж”. Критерии оптимальности соответствующих секторов выражают их прибыль и имеют вид

$$\begin{cases} R_1 = Q_1(Q_2)p_1 - (x_1(Q_1)p_{11} + \\ R_2 = Q_2(Q_3)p_2 - Q_2(Q_3)p_1 - \\ R_3 = Q_3(p_3)p_3 - Q_3(p_3)p_2 - \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &+ x_2(Q_1)p_{12} + CF_1) \to \max, \\ &- CF_2 \to max, \\ &- CF_3 \to max, \end{aligned} \qquad (19)$$

где $p_k, k = 1,2$ - вектор внутрикорпоративных цен, являющийся параметром управления; p_3 - цена спроса на конечную продукцию; $Q_3(p_3)$ - функция конечного спроса; $Q_2(Q_3)$ - функция заказа или производного спроса, совпадающая для оптового и производственного сектора $Q_2(Q_3) \equiv Q_1$ при условии отсутствия складских остатков; $x_1(Q_1), x_2(Q_1)$ - функции спроса на производственные ресурсы; p_{11}, p_{12} - закупочные цены ресурсов; $CF_k, k = 1,\ 2,\ 3$ - вектор фиксированных издержек агентов.

Ограничения на вектор управления имеют вид

$$\begin{cases} p_1 \ge r_1 \dfrac{(p_{11}x_1(Q_1) + p_{12}x_2(Q_1) + CF_1)}{Q_2(Q_3)}, \\ p_2 \ge p_1 + \dfrac{CF_1}{Q_2(Q_3)}, \\ p_3 \ge p_2 + \dfrac{CF_2}{Q_3(p_3)}, \end{cases} \qquad (20)$$

$$\begin{cases} x_1(Q_1) = Q_1, \\ x_2(Q_1) = \sqrt{\dfrac{Q_1 - x_1 - 4{,}94 \cdot 10^{-8}}{10{,}34 \cdot 10^{-11}}}, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} Q_1(Q_2) = 55{,}36 \cdot 10^{-9} Q_2^{\,2} + 30{,}85 \cdot 10^{-15} Q_2, \\ Q_2(Q_3) = Q_3, \end{cases} \quad (22)$$

$$Q_3(p_3) = -221\ 501{,}5 p_3 + 37\ 167\ 953, \quad (23)$$

где r_1 - рентабельность производственного сектора в предшествующем периоде; ограничения (20) выражают требование рентабельного функционирования всех секторов; функции спроса на ресурсы (21), функции заказа (22) и функция конечного спроса (23) определены статистически по данным предшествующих периодов.

На первом этапе решения задачи (19)-(23) определим для нескольких вариантов цены спроса (p_3=85 руб./м - цена, сложившаяся в 2014 г.; p'_3=83,9 руб./м, p''_3=87 руб./м пределы цены в соответствии с колебаниями спроса, имевшими место в 2008-2013 гг.); векторы управления $u_k^*, k = 1,2,3$, оптимальные по каждому из критериев (19) в отдельности; рассчитаем значения прибыли секторов $R_k(u_k^*), k = 1,2,3$ и холдинга в целом $R_\Sigma(u_k^*), k = 1,2,3$ при таких векторах управления; определим нормированные значения прибыли секторов $\overline{R}_k(u_k^*), k = 1,2,3$ и коэффициенты рентабельности (см. таблицу).

Анализ таблицы 1 показывает, что оптимальные решения достигаются при граничных значениях в соответствии с линейным характером изменения целевых функций агентов системы; общая прибыль холдинга не зависит от изменения выбранного управления; каждый сектор вертикально-интегрированной системы достигает максимума прибыли при управлении, полученном при максимизации соответствующего критерия; рентабельность секторов снижается при переходе от управления, оптимального для данного сектора, к другим управлениям и возрастает с увеличением рыночной стоимости продукции.

Результаты первого этапа решения многокритериальной задачи

Параметр	Рыночная цена продукции, руб./м								
	83,90			85,00			87,00		
	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_1^*	u_2^*	u_3^*
Вектор параметров управления - внутрикорпоративных цен, руб.									
$p_1(u_k^*)$	73,28	69,92	69,92	74,24	69,26	69,26	75,97	68,06	68,06
$p_2(u_k^*)$	79,12	79,12	75,76	80,16	80,16	75,17	82,04	82,04	74,12
Прибыль секторов и холдинга, млн руб.									
$R_1(u_k^*)$	113,35	50,80	50,80	141,09	49,66	49,66	189,27	47,62	47,62
$R_2(u_k^*)$	19,76	82,32	19,76	19,76	111,20	19,76	19,76	161,41	19,76
$R_3(u_k^*)$	10,70	10,70	73,25	10,70	10,70	102,13	10,70	10,70	152,34
$R_\Sigma(u_k^*)$	143,81	143,81	143,81	171,55	171,55	171,55	219,73	219,73	219,73
Нормированная прибыль секторов									
$\overline{R}_1(u_k^*)$	1,00	0,62	0,69	1,00	0,45	0,49	1,00	0,30	0,31
$\overline{R}_2(u_k^*)$	0,17	1,00	0,27	0,14	1,00	0,19	0,10	1,00	0,13
$\overline{R}_3(u_k^*)$	0,09	0,13	1,00	0,08	0,10	1,00	0,06	0,07	1,00
Коэффициент рентабельности секторов									
$r_1(u_k^*)$	0,0908	0,0407	0,0407	0,1156	0,0407	0,0407	0,1617	0,0407	0,0407
$r_2(u_k^*)$	0,0136	0,0593	0,0142	0,0136	0,0818	0,0145	0,0136	0,1235	0,0151
$r_3(u_k^*)$	0,0069	0,0069	0,0493	0,0069	0,0069	0,0701	0,0069	0,0069	0,1084

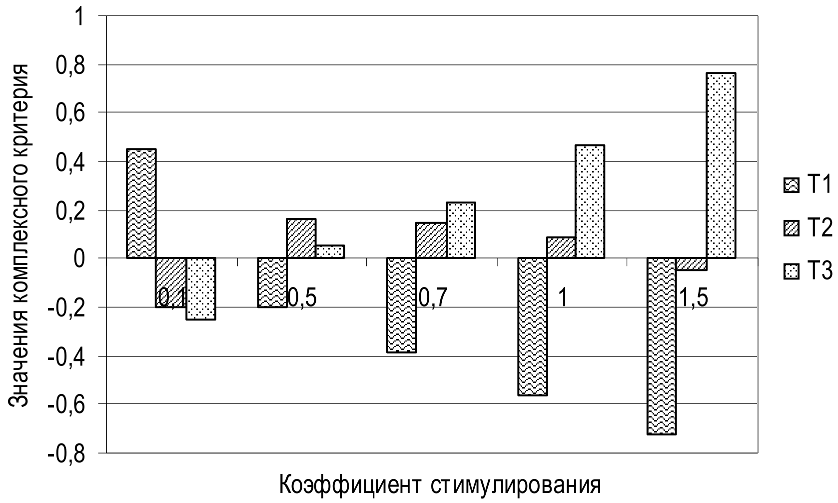


Рис. 2. **Значения комплексных критериев**

Второй этап заключается в выборе коэффициентов значимости путем варьирования коэффициента стимулирования α, а на третьем этапе формируются оптимальные решения для различных значений этого коэффициента.

На рис. 2 показаны значения комплексных критериев при различных коэффициентах стимулирования. Как видно, при $0 \le \alpha < 0{,}5$ цели вертикально-интегрированной системы наилучшим образом отражает управление (вектор цен), оптимальный по критерию производственного сектора; при $\alpha = 0{,}5$ будет сформировано управление, оптимальное по критерию сектора оптовых продаж; при $\alpha > 0{,}5$ - по критерию розничных продаж.

Обоснование адекватности метакритерия

Как было указано выше, среди различных агрегированных критериев только метакритерий в виде максимина позволяет сформировать Парето-оптимальное управление. Поэтому доказательство тождества управления, выбранного исходя из предлагаемого метакритерия (13), и максиминного управления является строгим обоснованием данного подхода.

Докажем следующее ***утверждение***: вектор управления при равнозначности критериев удовлетворяет условию максимина (3) тогда и только тогда, когда максимизируется критерий (13).

Доказательство. Докажем достаточность условия (13) для выполнения (3). Пусть существует управление u_0, удовлетворяющее условию максимина (3). Покажем, что в этом случае выполняется условие (13). Было показано (условия (4),(5)), что управление, сформированное на основе принципа максимина, обладает следующими свойствами (графически для случая двух критериев показаны на рис. 3):

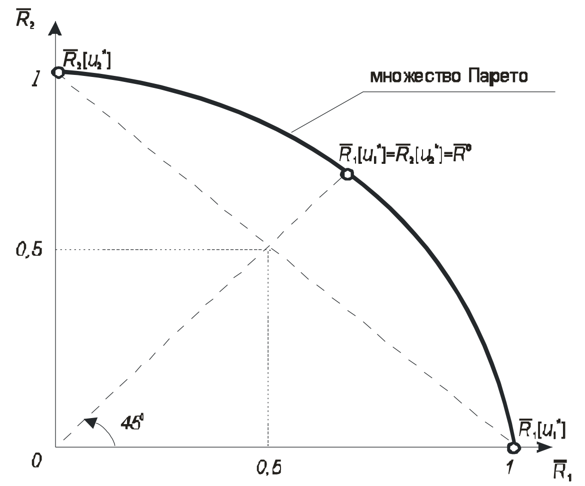


Рис. 3. **Графическая интерпретация множества Парето и принципа максимина**

$$\overline{R}_k\left[u_0\right] = \overline{R}^0, \quad k \in K. \qquad (24)$$

$$\overline{R}_k\left[u_k^*\right] \ge \overline{R}_k\left[u_0\right] \ge \overline{R}_k\left[u_i^*\right], \quad i \ne k, \quad i, k \in K. \qquad (25)$$

Поскольку управление u_0 максимизирует минимальный из критериев $\overline{R}_k$, $k \in K$, то оно соответствует максимуму некоторого “фиктивного” критерия $\overline{R}_0$, т.е. наряду с (24), (25) должно выполняться свойство

$$\overline{R}_0\left[u_0\right] \ge \overline{R}_0\left[u_k^*\right], \quad k \in K. \qquad (26)$$

Запишем выражение метакритерия (13) с учетом дополнительно введенного в рассмотрение критерия с индексом “0”:

$$T^m = (K-1)\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_m^*\right] - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{K}\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_j^*\right]. \qquad (27)$$

В частности, для управлений u_0, u_1 выражения (27) имеют вид

$$T^0 = (K-1)\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_0^*\right] - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{K}\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_j^*\right]. \qquad (28)$$

$$T^1 = (K-1)\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_1^*\right] - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{K}\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_j^*\right]. \qquad (29)$$

Поэтому

$$T^0 - T^1 = (K-1)\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_0^*\right] - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{K}\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_j^*\right] - (K-1)\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_1^*\right] - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{K}\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_j^*\right] = K\sum_{k=0}^{K}\left(\overline{R}_k\left[u_0^*\right] - \overline{R}_k\left[u_1^*\right]\right).$$

С учетом свойств (25), (26) это выражение неотрицательно, а поскольку аналогичные преобразования можно выполнить для управлений u_2, u_3 и т.д., то метакритерий достигает максимума при максиминном управлении u_0.

Докажем необходимость условия (13) для выполнения принципа максимина. Предположим, что при некотором управлении u_0 выполняется условие (13); покажем, что в этом случае управление u_0 отвечает условию максимина (3). Преобразуем выражение (28):

$$T^0 = (K-1)\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_0^*\right] - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{K}\sum_{k=0}^{K}\overline{R}_k\left[u_j^*\right] =$$

$$= \left\{(K-1)\overline{R}_0\left[u_0^*\right] - \sum_{j=1}^{K}\overline{R}_0\left[u_j^*\right]\right\} + \left\{(K-1)\overline{R}_1\left[u_0^*\right] - \sum_{j=1}^{K}\overline{R}_1\left[u_j^*\right]\right\} + \ldots + \left\{(K-1)\overline{R}_K\left[u_0^*\right] - \sum_{j=1}^{K}\overline{R}_K\left[u_j^*\right]\right\}. \qquad (30)$$

Для максимизации (30) необходимо обеспечить

$$\max_{u\in U}\overline{R}_1[u_0] \cup \max_{u\in U}\overline{R}_2[u_0] \cup \ldots \cup \max_{u\in U}\overline{R}_K[u_0].$$

В силу противоречивости критериев увеличение $\overline{R}_i, i = 1,\ldots,K$ приводит к уменьшению $\overline{R}_j, j = 1,\ldots,K, j \neq i$, и наоборот. Поэтому метакритерий T^0 достигает наибольшего значения при

$$\overline{R}_1[u_0] = \overline{R}_2[u_0] = \ldots = \overline{R}_K[u_0] = \overline{R}^0,$$

т.е. выполняется свойство (24).

Свойство (25) вытекает из условий нормализации критериев (4). Кроме того, из (30) следует, что при максимизации T^0 предполагает выбор такого u_0, при котором увеличивается значение критерия $\overline{R}_0[u_0]$ и уменьшаются значения критериев $\overline{R}_0\left[u_1^*\right], \overline{R}_0\left[u_2^*\right]$ и т.д., т.е. выполняется свойство (26). Таким образом, для управления, выбранного из условия максимума (13), выполняются свойства управления, соответствующего принципу максимина (3). ***Утверждение доказано.***

Следовательно, формально обоснована адекватность сформированного метакритерия для решения задач многокритериальной оптимизации.

Заключение

Предложен приближенный метод решения многокритериальных задач формирования управления в иерархических системах на основе агрегированного критерия (метакритерия), имеющий следующие преимущества.

Принцип максимина, на котором основан метод, при непосредственном применении приводит к итерационной процедуре, которая в случае большого количества критериев может потребовать значительных временных затрат; предложенная процедура сводится к алгебраическому сравнению скалярных значений метакритерия *T*, вычисленных для конечного числа Парето-оптимальных управлений. При этом анализируется дискретное подмножество непрерывного в общем случае множества Парето, включающее в себя только векторы управления, оптимизирующие частные критерии агентов системы. Тем самым предполагается, что в иерархической системе компромиссно-оптимальное управление является управлением, оптимальным по критерию одного из агентов, в силу чего многокритериальный выбор существенно упрощается.

Предложенный метакритерий имеет определенную экономическую интерпретацию и экономически обоснован для иерархических организационно-экономических систем; этот критерий является комплексной количественной характеристикой относительной предпочтительности компромиссно-оптимального управления по сравнению с другими Парето-оптимальными управлениями; следовательно, метакритерий выражает цели иерархической системы более объективно, чем используемые ранее для подобных задач аддитивные критерии. Кроме того, в реальных задачах оптимизации управления в организационно-экономических системах могут возникать случаи, когда ни один из компонентов дискретного подмножества Парето-множества не является компромиссно-оптимальным с точки зрения принципа максимина; при этом практически значимым будет управление, наиболее близкое к компромиссно-оптимальному по принципу максимина, и метакритерий является действенным инструментом выбора такого управления.

1. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов (основы теории). М. : Наука, 1990. 476 с.

2. *Брахман Т.Р.* Многокритериальность и выбор альтернатив. М. : Радио и связь, 1984. 280 с.

3. *Гераськин М.И.* Модели оптимизации управления неиерархическими системами корпораций при межкорпоративных взаимодействиях. Проблемы управления. 2010. № 5. С. 28-38.

4. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М. : Наука, 1976. 340 с.

5. *Дайер Дж.* Многоцелевое программирование с использованием человеко-машинных процедур // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М. : Мир, 1976. С. 28-44.

6. *Дементьев В.Е.* Интеграция предприятий и экономическое развитие. М. : ЦЭМИ РАН, 1998. 167 с.

7. *Дементьев В.Е.* Становление ФПГ и ТФПГ в российской экономике. М. : ЦЭМИ РАН, 1998. 227 с.

8. *Дубов В.А., Травкин С.И., Якимец В.Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М. : Наука, 1986. 310 с.

9. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М. : Мир, 1964. 650 с.

10. *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. М. : Наука, 1987. 320 с.

11. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений. М. : Университетская книга : Логос, 2006. 392 с.

12. *Лысаков А.В., Новиков Д.А.* Договорные отношения в управлении проектами. М. : ИПУ РАН, 2004. 100 с.

13. *Машунин Ю.К.* Методы и модели векторной оптимизации. М. : Наука, 1986. 275 с.

14. *Меркурьев В.В., Молдавский В.А.* Семейство сверток векторного критерия для нахождения точек множества Парето // Автоматика и телемеханика. 1979. № 1. С. 110-122.

15. *Микони С.В.* Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. СПб. : Лань, 2009. 272 с.

16. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М. : Наука, 1982. 367 с.

17. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М. : Наука, 1970. 480 с.

18. *Новиков Д.А.* Институциональное управление организационными системами. М. : ИПУ РАН, 2004. 68 с.

19. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. Серия “Информатизация России на пороге XXI века. М. : СИНТЕГ, 1999. 108 с.

20. *Новиков Д.А.* Математические модели формирования и функционирования команд. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2008. 184 с.

21. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. М. : Изд-во Московского психолого-социального института, 2005. 276 с.

22. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. 2-е изд., испр. и доп. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 176 с.

23. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Наука, 1982. 345 с.

24. *Полищук Л.И.* Об обобщенных критериях с коэффициентами важности в задачах векторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 55-60.

25. *Руа Б.* Проблемы и методы принятия решений в задачах с многими целевыми функциями // Вопросы анализа принятия решения. М. : Мир, 1976. С. 21-58.

26. *Саати Т.Л.* Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 360 с.

27. *Салуквадзе М.Е.* О задаче линейного программирования с векторным критерием качества // Автоматика и телемеханика. 1972. 5. С. 99-105.

28. *Фишхоф В.Г., Гольтейн Б.Г., Шапиро З.Р.* Субъективная ожидаемая полезность: модель принятия решений // Процедуры оценивания многокритериальных объектов. М. : ВПИИСИ, 1984. Вып. 9. С. 24-46.

29. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. СПб. : БХВ-Петербург, 2005. 416 с.

30. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М. : Радио и связь, 1992.

31. *Щепкин А.В.* Внутрифирменное управление (модели и методы). М. : ИПУ РАН, 2001. 80 с.

32. *Arman R.* Solving multi-objective programming problems by discrete representation // Optimization. 1989. № 4. P. 483-492.

33. *Caverny J.P., Bar-Hillel M., Barron F.N., Jungerman H.* Contributions to decision research. North-Holland, 1993.

34. *Day R.H.* Rational choice of economic behavior // Theory of decision. 1997. № 1. P. 47-58.

35. *Houston M.C., Ogawa G.* Observations on the theoretic bases of costeffectiveness // Operations Research. 1966. Vol. 14. № 2. P. 20-32.

36. *Khanh P.Q.* Optimality conditions via norm scalarization in vector optimization // SIAM Journal Control and optimization. 1993. № 3. P. 646-658.

37. *Kцksalan M., Wallenius J., Zionts S.* Multiple Criteria Decision Making: From Early History to the 21st Century. Singapore: World Scientific, 2011. 159 p.

38. *Lootsma F.A.* The French and the American school in multi-criteria decision analysis // Rech. Oper. 1990. № 3. P. 263-285.

39. *Roy B.* Multy criteria methodology for decision aiding. Dordrecht : Kluwer academic publisher, 1996. 293 p.

40. *Smith G.R., Speiser F.* Logical decision: multy-measure decision analysis software. Golden. CO: PDQ Printing, 1991.

41. *Tarvainen K.* Generating Pareto-optimal alternatives by a nonfeasible hierarchical method // Journal Optimization: theory and applications. 1994. № 1. P. 181-185.

42. *Triantaphyllou E.* Multi-criteria Decision-Making Methods: A Comparative Study // Applied Optimization series. Vol. 44. 2000. 289 p.

43. *Vari A.* Selecting Decision Support Methods in Organizations // Journal of Applied Systems Analysis. 1994. Vol. II. P. 23-36.

Поступила в редакцию 22.10.2014 г.