УДК 519.85

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ МАТРИЧНЫХ ИГР, ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К ПЛАНИРОВАНИЮ ВОЕННЫХ ОПЕРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

© 2010 А.И. Чегодаев*

Ключевые слова: чистые и смешанные стратегии, оптимальные стратегии, функция выигрыша, симплекс-метод, математическое ожидание выигрыша, платежная матрица, вероятность случайного события, независимые и зависимые случайные события, математическая модель задачи.

Показывается применение свойств решений матричной игры, полученных автором статьи в предыдущих работах, а также методов линейного программирования и теории вероятностей к решению: 1) задачи о планировании поражения военного объекта и 2) задачи о планировании наступательного боя. Получены математические модели этих задач, оптимальные стратегии поведения участников военных конфликтов.

1. Задача о поражении военного объекта

Сторона A нападает на объект, сторона B обороняет его. У стороны A - два самолета, у стороны B - четыре зенитных орудия. Каждый самолет является носителем мощного поражающего средства. Для того, чтобы объект был поражен, достаточно, чтобы к нему прорвался хотя бы один самолет. Самолеты стороны A могут выбрать для подхода к объекту любое из четырех направлений. Сторона B может разместить любое из своих орудий на любом направлении, при этом каждое орудие простреливает только область пространства, относящуюся к данному направлению, и не простреливает соседних направлений. Каждое орудие может обстрелять только один самолет, причем обстрелянный самолет поражается с вероятностью *1*. Сторона A не знает, где размещаются орудия, а сторона B не знает, откуда прилетят самолеты. Цель стороны A - поразить объект, цель стороны B - не допустить его поражения. Считая, что выигрышем является вероятность поражения объекта, найти математическое ожидание выигрыша и оптимальные стратегии противников.

Решение. Конфликт между сторонами A и B налицо. Чистыми стратегиями для стороны A являются только две: A_1 - послать по одному самолету на два различных направления; A_2 - послать оба самолета по одному направлению.

Возможными чистыми стратегиями стороны B являются пять следующих: B_1 - ставить по одному орудию на каждое направление; B_2 - ставить по два орудия на два различных направления; B_3 - ставить два орудия на одно направление и по одному орудию - на два других направления; B_4 - ставить три орудия на одно направление и одно - на другое направление; B_5 - ставить все четыре орудия на одно направление. Построим платежную матрицу.

Так как число чистых стратегий стороны A равно двум, а число чистых стратегий стороны B равно пяти, то платежная матрица $H_{2\times5}$ имеет две строки и пять столбцов. Сначала вычислим элементы h_{ij} первой строки матрицы $H_{2\times5}$. Для этого введем в рассмотрение три случайных события C_1, C_2, C где C_1 - событие, состоящее в поражении объекта первым самолетом, C_2 - событие, состоящее в поражении объекта вторым самолетом, C - событие, состоящее в поражении объекта хотя бы одним самолетом. Очевидно, по определению суммы двух случайных событий, что $C = C_1 + C_2$. Для определения вероятности события C воспользуемся известной формулой:

$$P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1C_2), \quad (\Delta)$$

* Чегодаев Анатолий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Ярославского высшего зенитного ракетного училища противовоздушной обороны (военного института). E-mail: vestnik@sseu.ru.

справедливой для любых двух случайных событий. Так как стратегия A_1 стороны A такова, что самолеты направляются по двум различным направлениям, то события C_1, C_2 являются независимыми. А поэтому последняя формула может быть переписана в следующем виде

$$P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1)P(C_2). \quad (\Delta\Delta)$$

Для вычисления элементов первой строки h_{1j} матрицы $H_{2\times 5}$ воспользуемся этой формулой. Найдем, например, элемент h_{13}. Так как сторона A направляет самолеты по двум различным направлениям, а сторона B ставит два орудия на одно направление и по одному орудию - на два других направления, то вероятности событий C_1, C_2 одинаковы (лишь одно направление из четырех остается незащищенным) и равны $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$P(C) = h_{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

Аналогично найдем остальные элементы h_{1j}: $h_{11} = 0$, $h_{12} = \frac{3}{4}$, $h_{14} = \frac{3}{4}$, $h_{15} = \frac{15}{16}$.

Для вычисления элементов h_{2j} второй строки матрицы $H_{2\times 5}$ необходимо учесть, что события C_1, C_2 зависимы (самолеты летят по одному направлению и вероятность поражения объекта каждым из них существенно зависит от того, будет ли обстрелян самолет орудием) и пользоваться формулой $(\Delta\Delta)$ нельзя.

Использовать аналогичную формулу для зависимых событий

$$P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1)P_{C_1}(C_2)$$

или

$$P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_2)P_{C_2}(C_1)$$

нецелесообразно ввиду неопределенности при вычислении вероятностей событий. Достаточно использовать для вычисления элементов h_{2j} здравый смысл при теоретико-вероятностной оценке рассматриваемых ситуаций и формулу $P(C) = \frac{k}{n}$ для вычисления классической вероятности случайного события C. В результате получим: $h_{21} = 1$, $h_{22} = \frac{1}{2}$, $h_{23} = \frac{3}{4}$, $h_{24} = \frac{3}{4}$, $h_{25} = \frac{3}{4}$.

Итак, матрица $H_{2\times 5}$ имеет вид:

$$H_{2\times 5} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{16} & \frac{3}{4} & \frac{15}{16} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что четвертый вектор-столбец превосходит третий вектор-столбец, поэтому можно вычеркнуть из матрицы четвертый столбец. Аналогично, пятый вектор-столбец превосходит третий вектор-столбец. Следовательно, можно удалить и пятый столбец.

Итак, игра с матрицей $H_{2\times 5}$ может быть сведена к игре с матрицей

$$H_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{16} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Так как нижняя цена этой игры $v_1 = \frac{1}{2}$ не совпадает с верхней ценой $v_2 = 1$, то для нахождения решения игры используем смешанные стратегии. Чтобы найти оптимальную смешанную стратегию первого игрока и цену игры v, составим задачу линейного программирования. Пусть   - любая смешанная стратегия I игрока (стороны A). Числа x_1, x_2 удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{cases} x_2 \ge v, \\ \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \ge v, \\ \frac{7}{16}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \ge v, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Разделив все эти соотношения на число $v > 0$ и вводя обозначения $t_i = \frac{x_i}{v}$, $i = 1,2$, получим следующую задачу линейного программирования

$$\begin{cases} t_2 \geq 1, \\ \frac{3}{4}t_1 + \frac{1}{2}t_2 \geq 1, \\ \frac{7}{16}t_1 + \frac{3}{4}t_2 \geq 1, \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Задачу 1 решим симплекс-методом. Для этого приведем задачу к канонической форме, вводя дополнительные неизвестные t_3, t_4, t_5. В результате получим задачу вида:

$$z = t_1 + t_2 \to min,$$

$$\begin{cases} t_2 - t_3 = 1, \\ \frac{3}{4}t_1 + \frac{1}{2}t_2 - t_4 = 1, \\ \frac{7}{16}t_1 + \frac{3}{4}t_2 - t_5 = 1, \\ t_i \geq 0, i = 1,2,3,4,5. \end{cases}$$

Затем приведем последнюю систему уравнений к базисному виду, применяя симплексные преобразования для выбора разрешающих элементов. Будем иметь следующую задачу линейного программирования

$\frac{1}{v} = \frac{24}{11},$

$$z = t_1 + t_2 \to min,$$

$$\begin{cases} t_2 - t_3 = 1, \\ t_1 + \frac{22}{21}t_3 - \frac{16}{7}t_5 = \frac{26}{21}, \\ \frac{2}{7}t_3 + t_4 - \frac{12}{7}t_5 = \frac{3}{7}, \\ t_i \geq 0, i = 1,2,3,4,5. \end{cases}$$

Выразим целевую линейную функцию через свободные неизвестные t_3, t_5 последней системы, получим эту функцию в форме $z = \frac{47}{21} - \frac{1}{21}t_3 + \frac{16}{7}t_5$.

Затем составим симплекс-таблицу:

Базисные неизвестные	Свободные члены	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_1	$\frac{26}{21}$	1	0	$\frac{22}{21}$	0	$-\frac{16}{7}$
t_2	1	0	1	-1	0	0
t_4	$\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{2}{7}$	1	$-\frac{12}{7}$
z	$\frac{47}{21}$	0	0	$\frac{1}{21}$	0	$-\frac{16}{7}$

Анализируя симплекс-таблицу, применяя признак оптимальности опорного плана задачи линейного программирования, заключаем, что полученный опорный план $t^1_{опор} = \left(\frac{26}{21}, 1, 0, \frac{3}{7}, 0\right)$ не является оптимальным. Далее выбрав разрешающий элемент в столбце таблицы, соответствующем неизвестному t_3, по способу симплексных преобразований, пересчитав элементы таблицы по правилу прямоугольника, получим вторую симплекс-таблицу (см. далее).

Полученный опорный план $t^2_{опор} = \left(0, \frac{24}{11}, \frac{13}{11}, \frac{1}{11}, 0\right)$ (по признаку оптимальности) является оптимальным, причем единственным оптимальным планом, так как в последней строке симплекс-таблицы равны нулю только коэффициенты, соответствующие базисным неизвестным t_2, t_3, t_4.

Учитывая, что $t_1 + t_2 = \frac{1}{v}$, а $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{24}{11}$, вычислим цену игры v:

$$v = \frac{11}{24}.$$

Вспоминая равенства $t_1 = \frac{x_1}{v}$, $t_2 = \frac{x_2}{v}$, связывающие компоненты смешанной стратегии $x = (x_1, x_2)$ первого игрока и неизвестные t_1, t_2, относительно которых рассматривается задача I линейного программирования, найдем оптимальную смешанную стратегии стороны A:

$$x_1 = t_1 \times v = 0 \times v = 0,$$

Базисные неизвестные	Свободные члены	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_3	$\frac{13}{11}$	$\frac{21}{22}$	0	1	0	$-\frac{24}{11}$
t_2	$\frac{24}{11}$	$\frac{21}{22}$	1	0	0	$-\frac{24}{11}$
t_4	$\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{11}$	0	0	1	$-\frac{12}{11}$
z	$\frac{24}{11}$	$-\frac{1}{22}$	0	0	0	$-\frac{24}{11}$

$$x_2 = t_2 \times v = \frac{24}{11} \times \frac{11}{24} = 1, \quad x^* = (0,1).$$

Итак, после наших исследований появилась возможность выдать рекомендацию стороне A, стремящейся поразить военный объект рационально, наилучшим образом. Для того, чтобы достигнуть этого сторона A должна пользоваться своей второй стратегией A_2, т.е. посылать оба самолета по одному направлению из четырех направлений с вероятностью *1*. В таком случае сторона A добьется гарантированного среднего выигрыша: математическое ожидание поражения военного объекта составит $\frac{11}{24}$.

Осталось найти оптимальную стратегию $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ второго игрока в игре с матрицей

$$H_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{16} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Задача линейного программирования для нахождения стратегии y^*, двойственная задаче I, имеет вид:

$$w = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{v} \to \max,$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}u_2 + \frac{7}{16}u_3 \le 1, \\ u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{3}{4}u_3 \le 1, \\ u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0, \end{cases}$$

где $u_j = \frac{y_j}{v}$, $j = 1,2,3$, - цена игры,

- смешанная стратегия второго игрока.

Для нахождения оптимальной стратегии y^* второго игрока воспользуемся второй теоремой двойственности. Для этого предварительно ограничения-неравенства взаимодвойственных задач I и II запишем в виде уравнений, прибегая к введению дополнительных неизвестных. В результате будем иметь следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} t_2 - t_3 = 1, \\ \frac{3}{4}t_1 + \frac{1}{2}t_2 - t_4 = 1, \\ \frac{7}{16}t_1 + \frac{3}{4}t_2 - t_5 = 1, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}u_2 + \frac{7}{16}u_3 + u_4 = 1, \\ u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{3}{4}u_3 + u_5 = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Воспользуемся найденным выше оптимальным планом $t^*_{опт.} = \left(0, \frac{24}{11}, \frac{13}{11}, \frac{1}{11}, 0\right)$ преобразованной задачи I для нахождения оптимальной стратегии y^*. Так как координаты $t_2^* = \frac{24}{11}$, $t_3^* = \frac{13}{11}$, $t_4^* = \frac{1}{11}$ - положительные числа, по второй теореме двойственности соответствующие координаты оптимального решения $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*, u_5^*)$ преобразованной задачи II равны нулю, т.е.

$u_1^* = 0,\ u_2^* = 0,\ u_5^* = 0$. Координату u_3^* найдем из равенства $u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{v}$, в которое подставим найденные числа $u_1^* = 0,$ $u_2^* = 0,$ $v = \frac{11}{24}$. Получим $u_3^* = \frac{24}{11}$. Подставляя в равенства $y_1 = u_1 v,$ $y_2 = u_2 v,$ $y_3 = u_3 v$ числа $u_1^* = 0,$ $u_2^* = 0,$ $u_3^* = \frac{24}{11},$ $v = \frac{11}{24}$, получим оптимальную стратегию $y^* = (0{,}0{,}1)$ игрока II в игре с матрицей $H_{2\times3}$. Очевидно, что оптимальная стратегия второго игрока в игре с исходной матрицей $H_{2\times5}$ следующая: $y^* = (0{,}0{,}1{,}0{,}0)$. Таким образом, сторона *В*, организуя оборону военного объекта, должна применять свою третью стратегию B_3 с вероятностью, равной *1*, т.е. для того, чтобы наилучшим образом отразить нападение противника сторона *В* должна ставить два орудия на одно направление и по одному орудию на два других направления с вероятностью *1*.

2. Задача о планировании наступательного боя

Авианосное ударное соединение (АУС) “зеленых” планирует нанесение ударов по авианосному ударному соединению (АУС) “синих” в период *Т*, который состоит из единиц времени (например, $n = 5$). Удары, начиная с момента *i*, наносятся в каждую последующую единицу времени $i+1, i+2,\ldots,n$. В свою очередь, АУС “синих” для защиты кораблей предполагает в тот же период *Т* использовать средства радиоэлектронного противодействия (РЭП), которые после постановки в момент *j* создают противодействие в каждый последующий момент времени без изменения своих характеристик. Допустим, что средства РЭП, поставленные до начала нанесения ударов, обнаруживаются средствами доразведки, в результате чего эффективность этих средств снижается до нуля. С другой стороны, если удары наносятся ранее постановки средств РЭП, то эти средства снижают эффективность оружия до нуля. Кроме того, будем считать, что запланированное время нанесения ударов и постановки средств РЭП не может быть изменено, а удары наносятся с одинаковой интенсивностью. Предполагается, что математическое ожидание числа уничтоженных кораблей “синих” в единицу времени при нанесении ударов без противодействия средств РЭП равно *k* (в условиях противодействия будет). Кроме того, считают, что если удары наносятся одновременно с использованием средств РЭП, то математическое ожидание числа уничтоженных кораблей “синих” в единицу времени равно $\frac{k}{2}$ и остается постоянным для соответствующего отрезка периода *Т*. Предполагается, что если “зеленые” наносят удары без противодействия средств РЭП в течение $j - i$ единиц времени , то через $j - i$ единиц времени средства РЭП сведут эффективность последующих ударов к нулю. Предполагается, что если “зеленые” начнут наносить удары после использования “синими” средств РЭП , то эффективность средств РЭП будет равна нулю.

Требуется рассчитать математическое ожидание числа уничтоженных кораблей “синих” так, чтобы максимизировать это число за счет выбора *i*-й единицы начала ударов “зеленых” за период *Т*.

Решение. Очевидно, что “зеленые” и “синие” имеют противоположные цели, и состояние конфликта между ними бесспорно. “Зеленые” выбирают *i*-ю единицу времени начала ударов, стремясь максимизировать математическое ожидание числа уничтоженных кораблей “синих” за период *Т*, а “синие”, выбирая *j*-ю единицу времени начала использования средств РЭП, преследуют прямо противоположную цель - минимизируют математическое ожидание числа уничтоженных кораблей за период *Т*.

Получим математическую модель этой игры. Очевидно, что $X = \{1,2,\ldots,n\}$ - множество чистых стратегий I-го игрока (“зеленых”), а $Y = \{1,2,...,n\}$ - множество чистых стратегий II-го игрока ("синих"). Платежная функция $H(i, j)$ меняет свои значения в зависимости от вида соотношений, связывающих всевозможные чистые стратегии i, j игроков: 1) $i < j$, 2) 3) .

Если , то математическое ожидание числа уничтоженных кораблей "синих" за период T будет равно . Если $i = j$, то математическое ожидание числа уничтоженных кораблей "синих" равно .

Если $i > j$, то математическое ожидание числа уничтоженных кораблей "синих" равно .

Следовательно, функция $H(i, j)$ выигрыша I игрока такова:

$$H(i, j) = \begin{cases} k(j - i), & \text{если } i < j; \\ \dfrac{1}{2} k(n - i + 1), & \text{если } i = j; \\ k(n - i + 1), & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Как видно, конфликты, указанные в 1) задаче о планировании наступательного боя и в 2) задаче об антагонистической конкуренции (напечатанной в статье автора "О моделировании конфликта матричной игрой и применении свойств ее решений к прикладным задачам экономики и военного дела" в журнале "Вестник Самарского государственного экономического университета", 2009 г.) и разные по природе, имеют одну и ту же теоретико-игровую модель. Поэтому можно осуществить решение задачи о планировании наступательного боя (например, для $n = 5$) аналогично тому, как это сделано при решении задачи 2)[1].

---

[1] См.: *Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. М., 1981; *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М., 1985; *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970; *Чегодаев А.И.* Основы теории конечных антагонистических игр и их применение к решению задач экономики и военного дела : учеб. пособие. Ярославль, 1993; *Его же.* Математические методы и модели поддержки принятия решений в условиях неопределенностей : монография. Ярославль, 2007; *Его же.* Свойства решений матричной игры и их применение к проблеме принятия решений в условиях неопределенностей // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2008. № 6 (44); *Его же.* Математическая поддержка принятия решений в условиях неопределенностей посредством связей свойств решений матричных игр и принципа доминирования // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2008. № 7 (45); *Его же.* О моделировании конфликта матричной игрой и применении свойств ее решений к прикладным задачам экономики и военного дела // Вестн. Самар. гос. экон. ун-та. 2009. № 8 (58).

Поступила в редакцию 18.01.2010 г.