УДК 330.4

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ И ПРИНЦИПА ДОМИНИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

© 2010 А.И. Чегодаев*

Ключевые слова: чистые и смешанные стратегии, оптимальные стратегии, функция выигрыша, симплекс-метод, теоретико-игровая модель, математическое ожидание выигрыша, платежная матрица, прибыль, доминирование строк и столбцов матрицы, выпуклая линейная комбинация строк (столбцов) матрицы, оптимальное поведение игроков матричной игры.

Рассматриваются вопросы применения свойств решений матричной игры, а также связей между решениями двух матричных игр, строки (столбцы) матриц которых удовлетворяют требованию доминирования (полученных автором статьи и изложенных в его работах[1], к решению двух экономических задач: 1) задачи о планировании выпуска побочной продукции; 2) задачи о планировании посева. На основе найденного решения первой задачи сформулированы рекомендации оптимального поведения двух заводов по производству дополнительной продукции. Аналогично, составив теоретико-игровую модель задачи о планировании посева и найдя ее решение, автор указывает, как получить гарантированный доход с каждого гектара.

Задача 1. О планировании выпуска побочной продукции

Два завода города получили задание выпускать для населения города, кроме основных изделий, побочную продукцию (детские игрушки) пяти видов, причем установлено, что типы игрушек для каждого завода разные, себестоимость и продажная цена всех видов игрушек одинакова, все выпускаемые заводами игрушки продаются в городе, мощности заводов таковы, что каждый из них может обеспечить город игрушками. Первый завод, выпуская игрушки типа a_i, сбывает в городе $P_{ij} \times n$ игрушек, а второй завод, выпуская игрушки типа b_j, продает $(1 - P_{ij})n$ игрушек (где $i, j = 1,2,3,4,5$; $0 \le P_{ij} \le 1$).

Предполагается, что доход от продажи одной игрушки равен *1*, прогнозируемая доля сбыта игрушек первого завода задана матрицей $P_{5\times 5} = (P_{ij})$:

$$P_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}0 & 0{,}2 \end{pmatrix},$$

а всего игрушек будет продано *10 000* штук.

Требуется рассчитать выпуск типов игрушек каждым заводом таким образом, чтобы обеспечить максимум прибыли каждому заводу.

Решение. Очевидно, что интересы заводов по производству и продаже игрушек противоположны, каждый из них стремится к получению максимальной прибыли. Составим теоретико-игровую модель конфликтной ситуации, в которой находятся заводы (игроки). Матрицу выигрышей $H_{5\times 5}$ для первого игрока можно записать, если учесть заданную матрицу $P_{5\times 5}$ и то, что доход от продажи одной игрушки равен *1*, а всего игрушек будет продано *10 000* штук:

$$H_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 5000 & 5000 & 4000 & 5000 & 2000 \\ 5000 & 4000 & 7000 & 1000 & 6000 \\ 2000 & 3000 & 4000 & 1000 & 7000 \\ 3000 & 6000 & 7000 & 3000 & 2000 \\ 4000 & 4000 & 3000 & 0 & 2000 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что каждый элемент матрицы выигрышей $H_{5\times 5}$ первого игрока в ситуации (i, j) равен $P_{ij}n$, где $n = 10000$, а P_{ij} - элемент матрицы $P_{5\times 5}$ $(i, j = 1,2,3,4,5)$.

* Чегодаев Анатолий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Ярославского высшего зенитного ракетного училища противовоздушной обороны (военного института). E-mail: vestnik@sseu.ru.

Аналогично рассуждая, можно записать и матрицу выигрышей второго игрока. Доход второго игрока в ситуации (i, j) равен $(1 - P_{ij})n$, а сумма доходов игроков в каждой ситуации (i, j) равна одному и тому же числу n: $P_{ij}n + (1 - P_{ij})n = n$.

Это указывает на противоположность интересов заводов (игроков) и наличие конфликта. Матрица H моделирует этот конфликт. Зная матрицу H, найдем оптимальные стратегии x^* и y^* соответственно первого и второго игрока, математическое ожидание первого игрока (значение игры) $v_* = H(x^*, y^*)$. Используя результаты, полученные автором статьи в п. 3.5.9 и 3.5.10 монографии[2], будем последовательно упрощать матрицу H (следовательно и игру с матрицей H), т.е. сводить решение игры с матрицей H к решениям других игр с матрицами меньшего формата. Сначала матрицу H умножим на число $k = \frac{1}{1000}$, получим матрицу

$b_1 = (4,7,4,7)$

$$H^1_{5\times5} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что первая вектор-строка матрицы $H^1_{5\times5}$ доминирует пятую вектор-строку, т.е. все ее элементы превосходят соответствующие элементы пятой строки. Аналогично, элементы четвертого вектор-столбца не превосходят соответствующих элементов первого и второго вектор-столбца. Поэтому четвертый вектор-столбец доминирует первый и второй вектор-столбцы матрицы.

Замечание. Сформулируем очевидные предложения относительно доминирования строк и столбцов матрицы.

Предложение 1. Если i-ю вектор-строку матрицы превосходит выпуклая линейная комбинация остальных вектор-строк с коэффициентами *1, 0, 0, ..., 0,* то вектор-строка, входящая в эту комбинацию с коэффициентом *1,* будет доминировать указанную i-ю вектор-строку.

Предложение 2. Если j-й вектор-столбец матрицы превосходит выпуклую линейную комбинацию остальных вектор-столбцов этой матрицы с коэффициентами *1, 0, 0, ..., 0,* то вектор-столбец, входящий в эту комбинацию с коэффициентом *1*, будет доминировать j-й вектор-столбец этой матрицы.

Замечание необходимо было сделать для того, чтобы иметь основание делать ссылки на теоремы п. 3.5.10 монографии автора статьи, предварительно их перефразировав с учетом сформулированных предложений.

Итак, установлено, что первая чистая стратегия доминирует пятую чистую стратегию, а четвертая чистая стратегия второго игрока доминирует его первую и вторую чистые стратегии.

Отсюда следует, что появилась возможность свести изучение свойств решений игры с матрицей $H^1_{5\times5}$ к свойствам решений игры с матрицей

$$H^2_{4\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

полученной из матрицы $H^1_{5\times5}$ удалением ее пятой строки, первого и второго столбцов. Точнее, если $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ и $y^* = (y_3^*, y_4^*, y_5^*)$ - оптимальные смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков, а v_* - значение игры с матрицей $H^2_{4\times3}$, то решение игры с матрицей $H^1_{5\times5}$ будет следующая тройка объектов $\{x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, 0),\ y^* = (0, 0, y_3^*, y_4^*, y_5^*),\ v^*_{H_{4\times3}}\}$ (на основании теорем 1, 2 п. 3.5.10 монографии автора статьи).

Легко проверить, что первый вектор-столбец матрицы $H^2_{4\times3}$ строго превосходит выпуклую линейную комбинацию второго и третьего вектор-столбцов этой матрицы с коэффициентами $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$:

$$\frac{3}{5}\bar{b}_2 + \frac{2}{5}\bar{b}_3 = \frac{3}{5}\times(5,1,1,3) +$$
$$+\frac{2}{5}\times(2,6,7,2) = \left(\frac{19}{5},3,\frac{17}{5},\frac{13}{5}\right).$$

Удалив из матрицы $H^2_{4\times3}$ первый столбец, получим матрицу $H^3_{4\times2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Если

$\left\{\tilde{x}^* = \left(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*\right), \tilde{y}^* = \left(\tilde{y}_4^*, \tilde{y}_5^*\right), \tilde{v}^*_{H^3_{4\times2}}\right\}$ - решение игры с матрицей $H^3_{4\times2}$, то совокупность $\left\{\left(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*\right), \left(0, \tilde{y}_4^*, \tilde{y}_5^*\right), \tilde{v}^*_{H^3_{4\times2}}\right\}$ является решением игры с матрицей $H^2_{4\times3}$ (см. теорему 2 п. 3.5.10 монографии автора статьи).

Анализируя строки матрицы $H^3_{4\times2}$, замечаем, что элементы второй строки не больше соответствующих элементов третьей строки, а элементы четвертой строки не больше соответствующих элементов первой строки. Следовательно, третья чистая стратегия первого игрока доминирует его вторую чистую стратегию, а первая чистая стратегия доминирует четвертую чистую стратегию. Далее, вычеркнув в матрице $H^3_{4\times2}$ вторую и четвертую строки, получим матрицу $H^4_{2\times2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ второго порядка, которая не имеет седлового элемента, так как $v_1 = \max\limits_i \min\limits_j h_{ij} = 2$, а $v_2 = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij} = 5$, $v_1 \neq v_2$.

Поэтому игру с матрицей $H^4_{2\times2}$ решаем в смешанных стратегиях.

Если будет найдено решение $\left\{\tilde{\tilde{x}}^* = \left(\tilde{\tilde{x}}_1^*, \tilde{\tilde{x}}_3^*\right), \tilde{\tilde{y}}^* = \left(\tilde{\tilde{y}}_4^*, \tilde{\tilde{y}}_5^*\right), v^*_{H^4_{2\times2}}\right\}$ игры с матрицей $H^4_{2\times2}$, то набор объектов $\left\{\tilde{x}^* = \left(\tilde{\tilde{x}}_1^*, 0, \tilde{\tilde{x}}_3^*, 0\right), \tilde{y}^* = \left(\tilde{\tilde{y}}_4^*, \tilde{\tilde{y}}_5^*\right), v^*_{H^4_{2\times2}}\right\}$, будет решением игры с матрицей $H^3_{4\times2}$ (на основании теоремы 1 п. 3.5.10 монографии автора статьи).

Решение игры с матрицей $H^4_{2\times2}$ найдем, исходя из результатов, полученных в п. 3.5.12 монографии автора статьи (см. формулы (***)). Так как коэффициент $a = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 5 - 2 - 1 + 7 = 9$ отличен от нуля, то однозначно находим компоненты решения игры с матрицей $H^4_{2\times2}$:

$$\tilde{\tilde{x}}_1^* = -\frac{c}{a} = -\frac{a_{21} - a_{22}}{a} = -\frac{1-7}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\tilde{\tilde{x}}_3^* = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{\tilde{y}}_4^* = -\frac{b}{a} = -\frac{a_{12} - a_{22}}{a} = -\frac{2-7}{9} = \frac{5}{9},$$

$$\tilde{\tilde{y}}_5^* = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9},$$

$$v^*_{H^4_{2\times2}} = \frac{\left|H^4_{2\times2}\right|}{a} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{9} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}.$$

Итак, найдено решение игры с матрицей $H^4_{2\times2}$ в виде

$$\left\{\tilde{\tilde{x}}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \tilde{\tilde{y}}_4^* = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right), v^*_{H^4_{2\times2}} = \frac{11}{3}\right\}.$$

Используя последовательно теоремы п. 3.5.10 монографии автора статьи, мы придем к следующему решению игры с матрицей $H^1_{5\times5}$:

$$\left\{x^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0\right),\right.$$

$$\left. y^* = \left(0,0,0,\frac{5}{9},\frac{4}{9}\right), v^*_{H^1_{5\times5}} = \frac{11}{3}\right\}.$$

Для того, чтобы записать решение данной игры с матрицей $H_{5\times5}$, необходимо заметить, что матрицы $H_{5\times5}$ и $H^1_{5\times5}$ связаны соотношением $H_{5\times5} = 1000H^1_{5\times5}$, а затем применить теорему 6 п. 3.5.9 монографии автора статьи. Итак, решение данной игры есть набор объектов $\left\{x^* = \left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0,0\right),\right.$

$$\left. y^* = \left(0,0,0,\frac{5}{9},\frac{4}{9}\right), v^*_{H_{5\times5}} = \frac{11000}{3}\right\}.$$

Осталось, используя найденное решение, выдать рекомендации оптимального поведения двух заводов по производству дополнительной продукции (игрушек). Чтобы обеспечить максимум прибыли от реализации игрушек, первый завод должен организовать выпуск игрушек только типов a_1 и a_3 соответственно с вероятностями $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. Что касается второго завода, то он должен организовать выпуск игрушек только типов b_4 и b_5 соответственно с вероятностями $\frac{5}{9}$ и $\frac{4}{9}$. Если учесть, что каждая игрушка приносит доход от продажи в одну денежную единицу, а реализуется всего *10 000* игрушек, то математическое ожидание числа реализованных игрушек первым заводом равно $\frac{11000}{3}$, а математическое ожидание числа реализованных игрушек вторым заводом равно $\frac{19000}{3}$.

Итак, задача 1 о планировании выпуска побочной продукции решена.

Задача 2. О планировании посева

Сельскохозяйственное предприятие может посеять три культуры A_1, A_2, A_3. Однако при прочих равных условиях урожаи этих культур зависят главным образом от погоды, а план посева должен обеспечить наибольший доход. Считают, что год может быть засушливым, нормальным и с обильными осадками ("дождями"). В следующей таблице заданы урожайность каждой культуры в центнерах соответственно при сухой, нормальной и дождливой погоде и цена за один центнер в рублях:

Погодные условия	Урожайность культуры в центнерах		
	A₁	*A₂*	*A₃*
Сухая погода	*20*	*7,5*	*0*
Нормальная погода	*5*	*12,5*	*7,5*
Дождливая погода	*15*	*5*	*10*
Цена за один центнер в рублях	*2*	*4*	*8*

Пренебрегая стоимостью семян и затратами на возделывание почвы, рассчитать максимальный доход с одного гектара при каждом состоянии природы, если засеять поле всеми культурами A_1, A_2, A_3. В какой пропорции необходимо засевать поле этими культурами, чтобы обеспечить предприятию гарантированный доход?

Решение. Построим математическую модель задачи. Очевидно, что эта модель будет теоретико-игровой. Сельскохозяйственное предприятие (игрок I) заинтересовано в том, чтобы посеять культуры таким образом, чтобы получить максимальный урожай, а природа (игрок II) "противодействует" этому. Следовательно, налицо конфликт. Предприятие имеет три чистых стратегии: 1) засеять поле культурой A_1, 2) засеять поле культурой A_2, 3) засеять поле культурой A_3. Игрок II (природа) также имеет три чистые стратегии (состояния природы): 1) сухая погода, 2) нормальная погода, 3) дождливая погода. Для того, чтобы представить конфликт в форме матричной игры, зададим функцию $H(x,y)$ выигрышей (доходов) предприятия в виде матрицы

$$H_{3\times3} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix},$$

где каждый элемент h_{ij} равен произведению цены a_i одного центнера культуры A_i на урожайность h'_{ij} культуры с одного гектара при состоянии природы j.

Если учесть данные таблицы, то матрица приобретает вид

$$v^* = \frac{11000}{3}$$

$$H_{3\times3} = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 30 \\ 30 & 50 & 20 \\ 0 & 60 & 80 \end{pmatrix}$$

Игру с матрицей $H_{3\times3}$ можно упростить, сведя ее к игре с матрицей

$$H^1_{3\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее упрощение этой матрицы невозможно. $H^1_{3\times3}$ не имеет седловой точки, так как нижняя цена v_1 игры, равная *2*, не совпадает с верхней ценой v_2, равной *4*. Поэтому игру с матрицей $H^1_{3\times3}$ решаем в смешанных стратегиях.

Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ - оптимальная смешанная стратегия игрока I, $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ - оптимальная смешанная стратегия II игрока, v - значение (цена) этой игры.

Найдем стратегию средствами линейного программирования. Имеют место ограничения:

$$4x_1 + 3x_2 \geq v,$$
$$x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq v,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq v,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

где $v > 0$. Разделив все неравенства и уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ на число v, вводя обозначения , $i = 1,2,3$, получим следующую задачу линейного программирования:

$$z = t_1 + t_2 + t_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 \geq 1, \\ t_1 + 5t_2 + 6t_3 \geq 1, \\ 3t_1 + 2t_2 + 8t_3 \geq 1, \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, \end{cases}.$$

Решив эту задачу, найдем ее оптимальный план $T = \left(\frac{11}{71}, \frac{9}{71}, \frac{5}{142}\right)$. Помня, что вычислим и значение игры $v = \frac{284}{90}$, а затем и компоненты оптимальной смешанной стратегии игрока I x^*: $x_1^* = \frac{22}{45}$, $x_2^* = \frac{18}{45}$, $x_3^* = \frac{5}{45}$. Значение игры с матрицей $H_{3\times3}$ равно $\frac{284}{9}$.

Итак, предприятие с вероятностью $\frac{22}{45}$ посеет культуру A_1, с вероятностью $\frac{18}{45}$ - культуру A_2, с вероятностью $\frac{5}{45}$ - культуру A_3; гарантированный доход с каждого гектара составляет $31\frac{5}{9}$ руб. Предприятие, засеяв поле культурами A_1, A_2, A_3 в отношении *22 : 18 : 5*, получит при всех погодных условиях ожидаемый доход не меньше $31\frac{5}{9}$ руб. с гектара. Задача решена.

---

[1] См.: *Чегодаев А.И.* Математические методы и модели поддержки принятия решений в условиях неопределенностей : монография. Ярославль, 2007; *Его же.* Свойства решений матричной игры и их применение к проблеме принятия решений в условиях неопределенностей // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2008. № 6 (44); *Его же.* Математическая поддержка принятия решений в условиях неопределенностей посредством связей свойств решений матричных игр и принципа доминирования // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2008. № 7 (45).

[2] Здесь и далее см.: *Чегодаев А.И.* Математические методы и модели...

[3] См. также: *Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. М., 1981; *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М., 1985; *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970; *Чегодаев А.И.* Основы теории конечных антагонистических игр и их применение к решению задач экономики и военного дела : учеб. пособие. Ярославль, 1993; *Его же.* О моделировании конфликта матричной игрой и применении свойств ее решений к прикладным задачам экономики и военного дела // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2009.

Поступила в редакцию 12.11.2009 г.