

## ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОПОЛНЕНИЯ ТОВАРНОГО ЗАПАСА ПРЕДПРИЯТИЯ С УЧЕТОМ ЗАДАНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

© 2009 Ю.С. Чуйкова\*

**Ключевые слова:** оптимальная величина совокупных затрат, план поступлений, ограничения на производственные мощности, функциональный цикл, минимальный уровень запаса, метод динамического программирования, параметр состояния, функция состояния.

Рассматривается метод динамического программирования для решения задачи управления товарным запасом предприятия. Описанная модель учитывает неравномерность планируемого спроса на продукцию, варьирующуюся величину заказа и функционального цикла.

Товарные запасы торговых предприятий составляют основной вес в стоимости их активов и являются основным источником пополнения собственных средств в виде прибыли от реализации. Вместе с тем товарные запасы представляют собой основную проблему ежедневного контроля.

Управление запасами в звеньях цепей поставок - традиционная проблема, каждый раз по-новому стоящая на предприятиях и в организациях различных направлений бизнеса, связанных с движением материальных потоков. Несмотря на вековую историю развития, управление запасами по-прежнему представляет собой проблемную зону менеджмента. Трудности заключаются в том, что увеличение уровня запасов ради снижения риска отказа потребляющему звену в поставке требуемых товарно-материальных ценностей чревато ростом объема замороженного капитала, потерей гибкости системы управления и торможением развития качества обслуживания.

В основе оптимизации уровня запасов лежит расчет партии поставки, восполняющей запас до оптимального уровня. Критерием оптимизации при этом является, как правило, минимум совокупных затрат, связанных с запасом: затраты на размещение заказа, погрузочно-разгрузочные работы, транспортировку, затраты на хранение и т.д.

С помощью математического моделирования можно описать правила и закономерности управления запасами.

Рассмотрим динамическую модель управления запасами, учитывающую неравномерность спроса, страховые запасы предприятия

и ограничение на производственные мощности поставщика.

Цель предприятия - выработать такую программу поступления товара на склад, которая обеспечила бы минимум совокупных затрат на формирование запаса.

Затраты на формирование товарного запаса складываются из затрат:

- 1) на формирование заказа и доставку;
- 2) закупку товара;
- 3) хранение.

Введем обозначения, где все переменные измеряются в штуках за период  $t$ :

$x_t$  - партия поставки;

$y_t$  - уровень запаса;

$d_t$  - спрос на изделия;

$n_t$  - количество поставок;

$S_t$  - величина страхового запаса;

$m$  - количество месяцев;

$w_t(x_t, y_t)$  - затраты на формирование и поддержание запаса.

Количество поставок  $n_t \in Z$  за период  $t$  зависит от уровня запаса и определяется соотношениями:  $y_t \geq S_t$ ,

$$n_t = \begin{cases} \frac{d_t}{x_t}, & \text{если } y_t \geq S_t, \\ \frac{1}{x_t} (d_t + S_t - y_t), & \text{если } y_t < S_t. \end{cases} \quad (1)$$

Запишем уравнение материального баланса:

$$y_t = y_{t-1} + x_t n_t - d_t, (t = 1, \dots, m). \quad (2)$$

То есть уровень запаса на конец периода  $t$  равен сумме уровня запаса на конец предшествующего периода  $t - 1$  и объема поступлений  $x_t n_t$  за вычетом спроса  $d_t$  за период  $t$ .

\* Чуйкова Юлия Сергеевна, аспирант Самарского государственного аэрокосмического университета им. акад. С.П. Королева. E-mail: chuikova@rambler.ru.

Составим план поступлений  $X = (x_1, \dots, x_m)$  и хранения запасов  $Y = (y_1, \dots, y_m)$ , при котором совокупные затраты предприятия  $W$  на формирование и поддержание запаса минимальны за весь плановый период:

$$W = \sum_{t=1}^m w_t(x_t, y_t) = \sum_{t=1}^m (g_t n_t + c_t x_t n_t + h_t y_t), \quad (3)$$

где  $g_t$  - затраты на формирование и доставку одной партии заказа;  $c_t$  - цена единицы продукции;  $h_t$  - затраты на хранение единицы продукции. Все затраты исчисляются в денежных единицах.

Введем ограничения на переменные  $x_t$  и  $y_t$ . По смыслу решаемой задачи эти переменные целочисленны и неотрицательны. Уровень запаса  $y_t$  не должен опускаться ниже величины страхового запаса  $S_t$ , а партия поставки  $x_t$  не должна превышать  $R$  - величину максимального разового заказа на производство. Для установленных условий поставки производитель за один раз может произвести ограниченное количество продукции.

Ограничения представим в виде

$$y_t \geq S_t, \quad x_t \leq R. \quad (4)$$

При составлении математической модели воспользуемся формулой страхового запаса Ч. Боденстаба<sup>1</sup>:

$$S_t = \lambda M_{t-1}(\alpha + \beta T), \quad (5)$$

где  $\lambda, \alpha, \beta$  - коэффициенты, полученные опытным путем;  $M$  - отклонение прогноза от фактических продаж;  $T$  - период между поставками.

Если этот период измеряется в неделях,

то  $T = \frac{4}{n_t}$  и формула страхового запаса примет вид:

$$S_t = \lambda M_{t-1}(\alpha + \beta \frac{4}{n_t}). \quad (6)$$

Задачу оптимизации запаса решим методом динамического программирования<sup>2</sup>. В качестве параметра состояния примем партию поставки периода  $t$ :

$$x_t = \{1, \dots, R\}. \quad (7)$$

Функцию состояния  $F_t(x_t)$  определим как минимальные затраты за плановый период:

$$F_t(x_t) = \min \sum_{t=1}^t w_t(x_t, y_t). \quad (8)$$

При  $t = 1$  соотношение (2) примет вид

$$y_1 = y_0 + x_1 n_1 - d_1. \quad (9)$$

Тогда с учетом (4) и (9) функция состояния

$$F_1(x_1) = \min w_1(x_1, y_1) = \min w_1(x_1; y_0 - x_1 n_1 + d_1). \quad (10)$$

При ограничениях

$$y_1 \geq S_1, \quad x_1 \leq R, \quad (11)$$

$$n_1 = \begin{cases} \frac{d_1}{x_1}, & \text{если } y_1 \geq S_1, \\ \frac{1}{x_1}(d_1 + S_1 - y_1), & \text{если } y_1 < S_1. \end{cases} \quad (12)$$

Запишем рекуррентное соотношение динамического программирования в модели управления запасами для произвольного  $t = 2, \dots, m$ .

$$F_t(x_t) = \min \left[ w_t(x_t, y_{t-1} + x_t n_t - d_t) + \min \sum_{t=1}^{m-1} w_{t-1}(x_{t-1}, y_{t-1}) \right], \quad (13)$$

или

$$F_t(x_t) = \min [w_t(x_t, y_t) + F_{t-1}(x_{t-1})]. \quad (14)$$

Ограничения представляются соотношениями (1) и (4).

Рассмотрим пример реализации модели для компании, занимающейся оптовой торговлей алюминиевых профилей и сопутствующей комплектации. Исходные данные компании представлены в табл. 1.

Определим оптимальные партии поставки для каждого периода  $t$  и частоту поступлений, при которых совокупные издержки на поддержание запаса минимальны.

Спрос внутри квартала на продукцию неравномерен. Соответственно в период с меньшей планируемой реализацией величина поступления должна быть меньше, чем в период с более высоким спросом.

Для решения поставленной задачи прогноз продаж определим исходя из истории продаж и сезонной волны, характерной для рассматриваемой товарной группы. В отличие от классической задачи оптимизации запаса, в которой используются данные по про-

Таблица 1

Данные компании по планируемым затратам и реализации

Показатели		Январь	Февраль	Март
Прогноз, шт.	$d$	15	18	28
Страховой коэффициент	$\lambda$	2,6		
Отклонение плана от факта продаж, шт.	$M$	6		
Цена продукции, ден. ед.	$c$	600		
Затраты на хранение единицы продукции, ден. ед.	$h$	42		
Затраты на формирование 1-го заказа, ден. ед.	$g$	50		

дажам прошлых периодов, в данной поставке оптимальный план поступлений строится на основе прогнозных значений.

Найдем партию поставки для периода  $t = 1$  без учета ограничений. Изменяя  $x_1$  от 1 до 7, определяем при каком  $x_1$  совокупные затраты будут минимальны. При партии поставки  $x_1 = 7$  с частотой  $n_1 = 1$  совокупные затраты  $w_1$  будут минимальны:

$$F_1(x_1) = \min w_1(7,0) = 4250 = F(7). \quad (15)$$

Введем ограничения (1) и (4). Уровень запаса не должен опускаться ниже величины страхового запаса, соответствующей  $n_t$ . Ре-

При оптимальной партии поставки  $x_1 = 5$  частота поставки  $n_1 = 2$ .

Из табл. 2 видно, что план поступлений строится таким образом, что уровень запаса не опускается ниже страхового. Страховой запас - величина не постоянная, увеличивается при увеличении периода планирования и наоборот.

Решим задачу для  $t = 2$ . Определим партию поставки на второй период, при которой минимальна сумма совокупных затрат за два периода  $t$ . При партиях поставки  $x_1 = 5$  и  $x_2 = 6$  с частотами  $n_1 = 2$  и  $n_2 = 3$  совокупные затраты будут минимальны:

Таблица 2

Определение совокупных затрат при  $x_1 = \{1, \dots, 7\}$

$x_1$	$n_1$	$y_1$	$w_1$	$S_1$
1	10	3	6626	2
2	5	3	6376	2
3	4	5	7610	3
4	3	5	7560	3
5	2	4	6268	4
6	2	5	7510	4
7	2	7	8794	4

Таблица 3

Определение оптимальной партии поставки с учетом ограничения по  $x_t$  и  $y_t$  за период  $t = 3$

Показатели		Январь	Февраль	Март
Прогноз, шт.	$d$	15	18	28
Страховой запас, шт.	$S$	4	4	3
Количество поставок, шт.	$n$	2	3	4
Оптимальная партия поставки, шт.	$x$	5	6	7
Затраты на хранение, ден. ед.	$hy$	168	168	126
Затраты на формирование заказов, ден. ед.	$gn$	100	150	200
Затраты на закупку, ден. ед.	$cxn$	6000	10 800	16 800
Итого затраты, ден. ед.	$f$	6268	11 118	17 126
Совокупные затраты за квартал, ден. ед.	$f$	34512		
Уровень запаса на конец периода, шт.	$y_t$	4	4	3
Максимальная партия на производство, шт.	$R$	7	7	7

зультаты расчетов представлены в табл. 2. Функция состояния

$$F_1(x_1) = \min w_1(5,4) = 6268 = F(5). \quad (16)$$

$$F_2(x_2) = \min[w_2(2,4) + F_1(5)] = 17386. \quad (17)$$

Решение задачи получено с использованием пакета "Поиск решений" в EXCEL. Ре-

зультаты расчетов за квартал представлены в табл. 3.

Использованный подход имеет следующие особенности, недоступные для классических формул расчета оптимальной партии поставки:

1. Учитывается неравномерность спроса в течение расчетного периода.

2. Поставки планируются на основе прогнозных значений спроса на рассматриваемый период, а не на основе продаж прошлых лет.

3. Партия и интервал поставки индивидуальны для каждого периода  $t$ .

4. Поставка на склад приходится одновременно, но время на разгрузку и складирование учитывается при расчете страхового запаса.

5. Уровень запаса не опускается ниже страхового.

б. Страховой запас - не постоянная величина, она увеличивается при увеличении периода планирования и наоборот.

В заключение отметим, что описанный подход позволяет снизить совокупные затраты на поддержание запаса до 15% при снижении среднего уровня запасов до 40%. А также позволяет варьировать величину запаса и функциональный цикл (период времени между заказом и поставкой товара на склад) в зависимости от текущей ситуации.

---

<sup>1</sup> Coyle J.J., Bardi E.J., Langley Jr.C.J. The Management of Business Logistics. West Publishing Company, 1996. P. 169-171.

<sup>2</sup> Математические методы принятия решений в экономике: Учебник / Под ред. В.А. Колемаева. М., 1999. С. 212.

*Поступила в редакцию 14.10.2009 г.*