ÓÄÊ 51-7

ÒÅÎÐÈß ÍÅ×ÅÒÊÈÕ ÌÍÎÆÅÑÒÂ È ÅÅ ÏÐÈÌÅÍÅÍÈÅ Ê ÏÐÎÁËÅÌÅ ÏÐÈÍßÒÈß ÐÅØÅÍÈÉ Â ÓÑËÎÂÈßÕ ÍÅ×ÅÒÊÎÉ ÈÍÔÎÐÌÀÖÈÈ, ÍÅ×ÅÒÊÈÕ ÎÃÐÀÍÈ×ÅÍÈÉ È ÍÅÎÏÐÅÄÅËÅÍÍÎÑÒÅÉ

© 2008 À.È. ×åãîäàåâ*

Êëþ÷åâûå ñëîâà: íå÷åòêèå ìíîæåñòâà, ïðîáëåìà ïðèíÿòèÿ ðåøåíèÿ, íå÷åòêàÿ èíôîðìàöèÿ, íå÷åòêèå îãðàíè÷åíèÿ, íå÷åòêàÿ öåëü, íåîïðåäåëåííîñòü, ôóíêöèÿ ïðèíàäëåæíîñòè, óíèâåðñàëüíîå ìíîæåñòâî, òåîðèÿ ñëó÷àéíûõ ìíîæåñòâ.

Ðàññìàòðèâàþòñÿ ïîíÿòèå íå÷åòêîãî ìíîæåñòâà Ë. Çàäå, îïåðàöèè íàä íå÷åòêèìè ìíîæåñòâàìè, èõ ñâîéñòâà, çíà÷åíèå íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ äëÿ ìàòåìàòè÷åñêîãî ìîäåëèðîâàíèÿ ñëîæíûõ ñèñòåì, äëÿ àäåêâàòíîãî îòîáðàæåíèÿ ðåàëüíîé äåéñòâèòåëüíîñòè; îáîáùåíèå àïïàðàòà íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ è åãî ðàçâèòèå; ïðèìåíåíèå òåîðèè íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ ê ïðîáëåìå ïðèíÿòèÿ ðåøåíèé â óñëîâèÿõ íå÷åòêîé èíôîðìàöèè, íå÷åòêèõ îãðàíè÷åíèé, íåîïðåäåëåííîñòåé ïîñðåäñòâîì ðåøåíèÿ òðåõ ïðàêòè÷åñêèõ çàäà÷: 1) çàäà÷è î âûáîðå ìåñòà ðàáîòû; 2) çàäà÷è î äîñòèæåíèè íå÷åòêîé öåëè Áåëëìàíà - Çàäå; 3) çàäà÷è îá ó÷åòå âñåâîçìîæíûõ êîìáèíàöèé öåëè è îãðàíè÷åíèé.

Â íàñòîÿùåå âðåìÿ íàõîäÿò øèðîêîå ïðèìåíåíèå ìàòåìàòè÷åñêèå ìåòîäû äëÿ îïèñàíèÿ è àíàëèçà ñëîæíûõ ýêîíîìè÷åñêèõ, ñîöèàëüíûõ, òåõíè÷åñêèõ, ýêîëîãè÷åñêèõ è äðóãèõ ñèñòåì. Îäíàêî ÿçûê òðàäèöèîííîé êëàññè÷åñêîé ìàòåìàòèêè, îñíîâàííîé íà òåîðèè ìíîæåñòâ è äâóçíà÷íîé ëîãèêå, ÿâëÿåòñÿ íåäîñòàòî÷íî ãèáêèì äëÿ ìîäåëèðîâàíèÿ ðåàëüíûõ ñëîæíûõ ñèñòåì, ðåàëüíûõ ÿâëåíèé, òàê êàê â íåì íåò ñðåäñòâà îïèñàíèÿ ïîíÿòèé, èìåþùèõ íåîïðåäåëåííûé ñìûñë. Íå÷åòêîñòü îêðóæàþùåãî íàñ ìèðà ñóùåñòâåííî îòðàæàåòñÿ íà ïîëó÷åíèè òàêèõ ìàòåìàòè÷åñêèõ ìîäåëåé, êîòîðûå íå îáëàäàþò ñâîéñòâîì àäåêâàòíîñòè îòîáðàæåíèÿ ìèðà, ðåàëüíîé äåéñòâèòåëüíîñòè è ñòàíîâÿòñÿ íåäîñòàòî÷íî ïðèãîäíûìè äëÿ èñïîëüçîâàíèÿ íà ïðàêòèêå. Êðîìå òîãî, ñëåäóåò îáðàòèòü âíèìàíèå íà âòîðóþ ñòîðîíó íå÷åòêîñòè ìèðà, êîòîðàÿ ïðèñóùà ìûøëåíèþ è âîñïðèÿòèþ ÷åëîâåêà. Íå÷åòêîñòü ñâîéñòâåííà åñòåñòâåííîìó ÿçûêó, à òàêæå è ÿçûêàì íàóêè, â ÷àñòíîñòè ÿçûê ìàòåìàòèêè ÿâëÿåòñÿ íå÷åòêèì. Äëÿ ìàòåìàòè÷åñêîãî ìîäåëèðîâàíèÿ ðåàëüíûõ ÿâëåíèé, ñëîæíûõ ñèñòåì áîëåå ãèáêèì è ïðèãîäíûì äëÿ îòîáðàæåíèÿ äåéñòâèòåëüíîñòè ÿâëÿåòñÿ ÿçûê òåîðèè íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ Ëîòôè À. Çàäå, àìåðèêàíñêîãî ó÷åíîãî, ñïåöèàëèñòà ïî òåîðèè óïðàâëåíèÿ ñëîæíûìè ñèñòåìàìè[1].

Ë. Çàäå ôîðìóëèðóåò îïðåäåëåíèå íå÷åòêîãî ìíîæåñòâà òàê: íå÷åòêîå ïîäìíîæåñòâî À óíèâåðñàëüíîãî ìíîæåñòâà U õàðàêòåðèçóåòñÿ ôóíêöèåé ïðèíàäëåæíîñòè $\mu_A : U \to [0,1]$, êîòîðàÿ ñòàâèò â ñîîòâåòñòâèå êàæäîìó ýëåìåíòó $u \in U$ ÷èñëî $\mu_a(u)$ èç îòðåçêà $[0,1]$, õàðàêòåðèçóþùåå ñòåïåíü ïðèíàäëåæíîñòè ýëåìåíòà u ïîäìíîæåñòâó À.

Çàìåòèì, ÷òî îáû÷íûå ìíîæåñòâà ÿâëÿþòñÿ ÷àñòíûìè ñëó÷àÿìè íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ. Äëÿ îáû÷íûõ ìíîæåñòâ $\mu_A(u)=1$, åñëè $u \in A$, èëè $\mu_A(u)=0$, åñëè $u \notin A$. Òåðìèíû “íå÷åòêîå ìíîæåñòâî” è “ôóíêöèÿ ïðèíàäëåæíîñòè” èñïîëüçóþò êàê ñèíîíèìû.

Ââåäåíèå îïåðàöèé íàä íå÷åòêèìè ìíîæåñòâàìè îñóùåñòâëÿåòñÿ ïîñðåäñòâîì ñëåäóþùåãî îïðåäåëåíèÿ.

Ïåðåñå÷åíèåì $A \cap B$, ïðîèçâåäåíèåì AB, îáúåäèíåíèåì $A \cup B$, ñóììîé $A+B$, îòðèöàíèåì $\overline{A}$ íàçûâàþòñÿ íå÷åòêèå ïîäìíîæåñòâà ñ ôóíêöèÿìè ïðèíàäëåæíîñòè ñîîòâåòñòâåííî

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)),$$

$$\mu_{AB}(u) = \mu_A(u)\mu_B(u),$$

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u)),$$

$$\mu_{A+B}(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u)\mu_B(u),$$

$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u),$$

ãäå À è Â - äâà íå÷åòêèõ ïîäìíîæåñòâà óíèâåðñàëüíîãî ìíîæåñòâà U ñ ôóíêöèÿìè

* ×åãîäàåâ Àíàòîëèé Èâàíîâè÷, êàíäèäàò ôèçèêî-ìàòåìàòè÷åñêèõ íàóê, äîöåíò ßðîñëàâñêîãî âûñøåãî çåíèòíîãî ðàêåòíîãî ó÷èëèùà ïðîòèâîâîçäóøíîé îáîðîíû (âîåííîãî èíñòèòóòà). E-mail: nauka@sseu.ru.

ïðèíàäëåæíîñòè $\mu_A(u)$ è $\mu_B(u)$ ñîîòâåòñòâåííî, à $u \in U$.

Çàìåòèì, ÷òî åñëè À è Â ÿâëÿþòñÿ îáû÷íûìè ìíîæåñòâàìè, òî ýòî îïðåäåëåíèå ïðèâîäèò ê îáû÷íûì ïîíÿòèÿì ïåðåñå÷åíèÿ, îáúåäèíåíèÿ è îòðèöàíèÿ ìíîæåñòâ. Âìåñòî äàííîãî ïîíÿòèÿ “ïåðåñå÷åíèå” â òåîðèè íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ ðàññìàòðèâàþòñÿ äâà ïîíÿòèÿ - “ïåðåñå÷åíèå” è “ïðîèçâåäåíèå”, à âìåñòî “îáúåäèíåíèÿ” ðàññìàòðèâàþòñÿ òàêæå äâà: “îáúåäèíåíèå” è “ñóììà”. Íåêîòîðûå èç îáû÷íûõ ñâîéñòâ îïåðàöèé íàä ìíîæåñòâàìè ñîõðàíÿþòñÿ è â òåîðèè íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ, îäíàêî èìåþòñÿ è òàêèå ñâîéñòâà, êîòîðûå íå èìåþò ìåñòà â ýòîé òåîðèè. Ìàòåìàòè÷åñêèé àïïàðàò íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ èìååò ñâîè íåäîñòàòêè, ñîñòîÿùèå, íàïðèìåð, â òîì, ÷òî ïî÷òè íåâîçìîæíî ó÷èòûâàòü çàâèñèìîñòü ðàçëè÷íûõ ìîäåëèðóåìûõ íå÷åòêèìè ìíîæåñòâàìè. Â äåéñòâèòåëüíîñòè çàâèñèìîñòè ìåæäó ðåàëüíûìè ÿâëåíèÿìè çíà÷èòåëüíî áîëüøå, êîòîðûå áû ó÷èòûâàëèñü âûâåäåííûìè îïåðàöèÿìè íàä íå÷åòêèìè ìíîæåñòâàìè ïðè ìîäåëèðîâàíèè.

Òåîðèÿ íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ ïîëó÷èëà â ðåçóëüòàòå ðàçâèòèÿ àïïàðàò ðåøåíèÿ ðàçëè÷íûõ ïðèêëàäíûõ çàäà÷, îòíîñÿùèõñÿ ê òåîðèè àëãîðèòìîâ, èñêóññòâåííîìó èíòåëëåêòó, òåîðèè ïðèíÿòèÿ ðåøåíèé, òåîðèè ðàñïîçíàâàíèÿ îáðàçîâ è ò.ä. Òåîðèÿ íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ - åäèíñòâåííàÿ òåîðèÿ, êîòîðàÿ ìàòåìàòè÷åñêè îïåðèðóåò ñî ñìûñëîâûì ñîäåðæàíèåì ñëîâ ÷åëîâåêà. Ë. Çàäå ïîêàçàë, êàêèì îáðàçîì íå÷åòêóþ, êà÷åñòâåííîãî õàðàêòåðà èíôîðìàöèþ ìîæíî èñïîëüçîâàòü â ôîðìàëèçîâàííûõ ïðîöåäóðàõ àíàëèçà. Îí ïðåäëîæèë òàêîå ðàñøèðåíèÿ ÿçûêà ìàòåìàòèêè, êîòîðîå ïîçâîëÿåò ó÷èòûâàòü íå÷åòêîñòü èñõîäíîé èíôîðìàöèè â ìàòåìàòè÷åñêèõ ìîäåëÿõ.

Ïîñêîëüêó òåîðèÿ ìíîæåñòâ - îñíîâà ñîâðåìåííîé ìàòåìàòèêè, ïîíÿòèå íå÷åòêîñòè ïîçâîëÿåò “óäâîèòü ìàòåìàòèêó”: çàìåíÿÿ îáû÷íûå ìíîæåñòâà íå÷åòêèìè, ìîæíî êàæäîìó ìàòåìàòè÷åñêîìó òåðìèíó ïîñòàâèòü â ñîîòâåòñòâèå åãî ìàòåìàòè÷åñêèé àíàëîã. Ðàññìàòðèâàþò, íàïðèìåð, íå÷åòêèå êëàññèôèêàöèè, óïîðÿäî÷åíèÿ, ëîãèêè, òåîðåìû, àëãîðèòìû, ïðàâèëà ïðèíÿòèÿ ðåøåíèé è ò.ä. Òåîðèÿ íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ ÿâëÿåòñÿ íå ìåíåå îáùåé ìàòåìàòè÷åñêîé äèñöèïëèíîé, ÷åì îáû÷íàÿ òåîðèÿ ìíîæåñòâ - ÷àñòíûé ñëó÷àé íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ. Â óçêîì ñìûñëå òåîðèÿ íå÷åòêîñòè êàê öåëîå îáîáùàåò êëàññè÷åñêóþ ìàòåìàòèêó.

Îáîáùåíèå àïïàðàòà íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ Ë. Çàäå ïðåäëîæèë À.È. Îðëîâ â 1975 ãîäó. Â êà÷åñòâå òàêîãî îáîáùåíèÿ À.È. Îðëîâ ïðåäëîæèë ðàññìàòðèâàòü òåîðèþ ñëó÷àéíûõ ìíîæåñòâ. Ýòî ïîçâîëÿåò òåîðèþ íå÷åòêîñòè âêëþ÷èòü â òåîðèþ âåðîÿòíîñòåé, äëÿ îáîñíîâàíèÿ òàêîãî âêëþ÷åíèÿ èñïîëüçóþòñÿ ñëó÷àéíûå ìíîæåñòâà, à íå ñëó÷àéíûå âåëè÷èíû. Òåîðèÿ ñëó÷àéíûõ ìíîæåñòâ - äîñòàòî÷íî ðàçâèòàÿ ÷àñòü òåîðèè âåðîÿòíîñòåé, åå ïðèìåíåíèå îêàçûâàåòñÿ ïîëåçíûì â ìàòåìàòè÷åñêîé ýêîíîìèêå, ýêñïåðòíûõ îöåíêàõ, ïðè ìîäåëèðîâàíèè ðàñïðîñòðàíåíèÿ ëåñíûõ ïîæàðîâ è ò.ä.

Ë. Çàäå ïðåäëîæèë ïðèíöèï îáîáùåíèÿ äëÿ íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ â 1976 ãîäó â ðàáîòå “Ïîíÿòèå ëèíãâèñòè÷åñêîé ïåðåìåííîé è åãî ïðèìåíåíèå ê ïðèíÿòèþ ïðèáëèæåííûõ ðåøåíèé”. Ïðèíöèï îáîáùåíèÿ ïîçâîëÿåò ðàññìàòðèâàòü ôóíêöèè îò íå÷åòêèõ ïåðåìåííûõ, â ÷àñòíîñòè, èçó÷àòü óñòîé÷èâîñòü ìîäåëåé ðåàëüíûõ ÿâëåíèé è ó÷èòûâàòü íå÷åòêîñòü â ìàòåìàòè÷åñêèõ ìîäåëÿõ.

Èññëåäîâàíà ñâÿçü íå÷åòêèõ è ñëó÷àéíûõ ìíîæåñòâ è åå âëèÿíèå íà òåîðèþ íå÷åòêîñòè è òåîðèþ âåðîÿòíîñòåé. Äëÿ ýòîãî àâòîðîì ñíà÷àëà ïîñëåäîâàòåëüíî èçó÷åíû ñëó÷àéíûå ñîáûòèÿ, ñëó÷àéíûå âåëè÷èíû è ñëó÷àéíûå ìíîæåñòâà. Ðàññìîòðåíû ÷åòêèå è íå÷åòêèå îòíîøåíèÿ, îïåðàöèè íàä ÷åòêèìè è íå÷åòêèìè îòíîøåíèÿìè è èõ ñâîéñòâà.

Èçó÷åíà ïðîáëåìà ïðèíÿòèÿ ðåøåíèé ïîñðåäñòâîì òåîðèè íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ â óñëîâèÿõ íå÷åòêîé èíôîðìàöèè è íå÷åòêèõ îãðàíè÷åíèé. Ïðè ýòîì ïðåäïîëàãàåòñÿ, ÷òî Õ - ýòî óíèâåðñàëüíîå ìíîæåñòâî àëüòåðíàòèâ, êîòîðîå íàõîäèòñÿ â ðàñïîðÿæåíèè ËÏÐ (ëèöà, ïðèíèìàþùåãî ðåøåíèÿ), à $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ - íàáîð óñëîâèé (îãðàíè÷åíèé) âûïîëíåíèÿ êàêîé-òî îïåðàöèè, ïðè÷åì $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ - êîíå÷íîå ìíîæåñòâî àëüòåðíàòèâ. Ñâÿæåì ñ óñëîâèåì $b_j\ (j = 1,2,...,m)$ íå÷åòêîå ìíîæåñòâî B_j, ïîñòðîåííîå íà ìíîæåñòâå àëüòåðíàòèâ Õ, ñ ôóíêöèåé ïðèíàäëåæíîñòè $\mu_{B_j} : X \to [0,1]$. Íå÷åòêîå ìíîæåñòâî B_j íàçîâåì íå÷åòêèì îãðàíè÷åíèåì. ×åì áîëüøå ñòåïåíü ïðèíàäëåæíîñòè àëüòåðíàòèâû x_i íå÷åòêîìó ìíîæåñòâó îãðàíè÷åíèé Â (ò.å. ÷åì áîëüøå çíà÷åíèå $\mu_B(x_i)$), òåì áîëüøå ñòåïåíü äîñòèæåíèÿ ýòîãî îãðàíè÷åíèÿ ïðè âûáîðå àëüòåðíàòèâû x_i â êà÷åñòâå ðåøåíèÿ.

Ðàññìîòðèì çàäà÷ó, èëëþñòðèðóþùóþ ïðèíÿòèå ðåøåíèÿ â óñëîâèÿõ íå÷åòêèõ îãðàíè÷åíèé: òðåáóåòñÿ âûáðàòü îäíî èç ÷åòûðåõ ìåñò ðàáîòû, êàæäîå èç êîòîðûõ îöåíèâàåòñÿ ñ òî÷êè çðåíèÿ N íåçàâèñèìûõ è ðàâíîïðàâíûõ ýêñïåðòîâ; íàáîð îãðàíè÷åíèé B ñîäåðæèò øåñòü êðèòåðèåâ (ïðèçíàêîâ), êîòîðûìè íåîáõîäèìî ðóêîâîäñòâîâàòüñÿ ïðè âûáîðå ìåñòà ðàáîòû: $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}$, ãäå b_1 - âîçìîæíîñòü çàíèìàòüñÿ íàó÷íîé ðàáîòîé, b_2 - ïåðñïåêòèâà ðîñòà, b_3 - ìàòåðèàëüíàÿ âûãîäà, b_4 - õîðîøèé êîëëåêòèâ, b_5 - óäîáíîå ìåñòîíàõîæäåíèå, b_6 - ïðåñòèæíîñòü; â êà÷åñòâå óíèâåðñàëüíîãî ìíîæåñòâà âûñòóïàåò ìíîæåñòâî $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, ãäå x_i - ìåñòî ðàáîòû.

Â ðåçóëüòàòå îáðàáîòêè äàííîé èíôîðìàöèè ïîëó÷åíû íå÷åòêèå ïîäìíîæåñòâà $B_j\ (j=1,2,3,4,5,6)$ ìíîæåñòâà Õ ñ ôóíêöèÿìè ïðèíàäëåæíîñòè $\mu_{B_j}: X\to[0,1]$, çíà÷åíèÿ êîòîðûõ óêàçàíû â òàáë. 1, ïðè ýòîì íå÷åòêèì ðåøåíèåì çàäà÷è ïðèíÿòèÿ ðåøåíèÿ ïðè íå÷åòêèõ îãðàíè÷åíèÿõ íàçûâàþò ïåðåñå÷åíèå D íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ âñåõ îãðàíè÷åíèé, à ôóíêöèÿ ïðèíàäëåæíîñòè ýòîãî ïåðåñå÷åíèÿ èìååò âèä $\mu_{D_i}(x_i)=\min\{\mu_{B_1}(x_i),\mu_{B_2}(x_i),\mu_{B_3}(x_i),\mu_{B_4}(x_i),\mu_{B_5}(x_i),\mu_{B_6}(x_i)\}$.

Çàìåòèì, ÷òî ïîëó÷åííîå ðåøåíèå $\mu_{D_i}(x_i)=0\quad(i=1,4)$ ìîæíî ðàññìàòðèâàòü êàê íå÷åòî ñôîðìóëèðîâàííóþ èíñòðóêöèþ âûáðàòü ìåñòî ðàáîòû x_1 èëè x_4, êîòîðîå óäîâëåòâîðÿåò âñåì ïîñòàâëåííûì óñëîâèÿì. Íå÷åòêîñòü ïîëó÷åííîãî ðåçóëüòàòà ðåøåíèÿ åñòü ñëåäñòâèå íå÷åòêîñòè ïîñòàíîâêè ñàìîé çàäà÷è. Ïðè òàêîì ïðåäñòàâëåíèè ðåøåíèÿ îñòàåòñÿ íåîïðåäåëåííîñòü, ñâÿçàííàÿ ñî ñïîñîáîì èñïîëíåíèÿ ïîäîáíîé íå÷åòêîé èíñòðóêöèè, ò.å. ñ òåì, êàêóþ àëüòåðíàòèâó ñëåäóåò âûáðàòü. Â îáùåì ñëó÷àå ðåøåíèå òàêîé ïðîáëåìû íàçûâàþò äåôàçèôèêàöèåé, êîòîðàÿ ñîñòîèò â ïåðåõîäå îò íå÷åòêèõ ïðåäñòàâëåíèé ê ñîîòâåòñòâóþùèì ÷åòêèì óïðàâëåíè÷åñêèì ðåøåíèÿì. Îäíèì èç ðàñïðîñòðàíåííûõ ñïîñîáîâ äåôàçèôèêàöèè çàêëþ÷àåòñÿ â òîì, ÷òî âûáîð ïðîèñõîäèò òîé àëüòåðíàòèâû x_i, êîòîðàÿ èìååò ìàêñèìàëüíóþ ñòåïåíü ïðèíàäëåæíîñòè íå÷åòêîìó ìíîæåñòâó B_i, ò.å.

$$\max_{x_i\in X}\mu_Д(x)=\max_{x_i\in X}\min\{\mu_{B_1}(x),\mu_{B_2}(x),\dots,\mu_{B_m}(x)\},$$

Â íàøåé çàäà÷å òàêîé àëüòåðíàòèâîé ÿâëÿåòñÿ x_3, òàê êàê

$$\max_{x_i\in X}\mu_Д(x)=\max_{x_i\in X}\min\{0;0,1;0,2;0\},$$

à $\mu_Д(x_3)=0,2$.

Ñëåäóåò îáðàòèòü âíèìàíèå íà îòñóòñòâèå ïðèîðèòåòà â âûáîðå ìåñòà ðàáîòû â ðàññìîòðåííîé çàäà÷å. Åñëè âûáðàòü â êà÷åñòâå ïðèîðèòåòíîãî îäèí ïðèçíàê (îãðàíè÷åíèå) è ðàññìàòðèâàòü åãî êàê íå÷åòêóþ öåëü ðåøåíèÿ çàäà÷è, òî îñòàëüíûå ïðèçíàêè ìîæíî ñ÷èòàòü â êà÷åñòâå íå÷åòêèõ îãðàíè÷åíèé (óñëîâèé) íà âûáîð öåëè. Â òàêîì ñëó÷àå ìû èìååì çàäà÷ó äîñòèæåíèÿ íå÷åòêîé öåëè ïðè íå÷åòêèõ îãðàíè÷åíèÿõ. Òàêóþ çàäà÷ó íàçûâàþò çàäà÷åé Áåëëìàíà - Çàäå. Ýòó íå÷åòêóþ öåëü G ìîæíî îïèñàòü ôóíêöèåé ïðèíàäëåæíîñòè $\mu_G: X\to[0,1]$, ïðè ýòîì ÷åì áîëüøå ñòåïåíü ïðèíàäëåæíîñòè $\mu_G(x)$ àëüòåðíàòèâû õ íå-

Òàáëèöà 1

Место работы x_i	Ограничения (признаки)						$\mu_D(x)$
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
	Значения функций принадлежности						
	$\mu_{B_1}(x)$	$\mu_{B_2}(x)$	$\mu_{B_3}(x)$	$\mu_{B_4}(x)$	$\mu_{B_5}(x)$	$\mu_{B_6}(x)$	
x_1	0,1	0,8	0,3	0	0,2	0,2	0
x_2	0,4	0,7	0,1	0,6	0,9	0,9	0,1
x_3	0,3	0,2	0,8	0,5	0,4	0,4	0,2
x_4	0,5	0,4	0	0,4	0,8	0,8	0

Òàáëèöà 2

X	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}	$\mu_G(x)$
x_1	0,1	0,4	0,3	0,5	1	0,4	0,8	0,3	0,2	0,3
x_2	0,3	0,6	0,4	0,6	0,9	0,4	0,9	0,3	0,3	0,3
x_3	0,5	0,8	0,4	0,7	0,8	0,5	1	0,5	0,5	0,5
x_4	0,6	1	0,5	0,8	0,7	0,7	0,9	0,5	0,7	0,4
x_5	0,7	0,9	0,6	1	0,7	0,8	0,8	0,4	0,8	0,1

÷åòêîìó ìíîæåñòâó G öåëè, òåì áîëüøå ñòåïåíü äîñòèæåíèÿ ýòîé öåëè ïðè âûáîðå àëüòåðíàòèâû õ â êà÷åñòâå ðåøåíèÿ. Íå÷åòêèå îãðàíè÷åíèÿ íà âûáîð öåëè áóäåì îïèñûâàòü íå÷åòêèìè ìíîæåñòâàìè $B_j\left(j=1,2,...,m\right)$ ñ ôóíêöèÿìè ïðèíàäëåæíîñòè $\mu_{B_j}: X\to[0,1]$. Ðåøèòü çàäà÷ó â óñëîâèÿõ - ýòî çíà÷èò äîñòèãíóòü öåëè ñ òîé èëè èíîé ñòåïåíüþ è óäîâëåòâîðèòü îãðàíè÷åíèÿì òàêæå ñ îïðåäåëåííîé ñòåïåíüþ. Çàìåòèì, ÷òî öåëåé ìîæåò áûòü íåñêîëüêî. Ðåøåíèåì çàäà÷è ñ÷èòàåòñÿ ïåðåñå÷åíèå ìíîæåñòâ öåëè è îãðàíè÷åíèé, ò.å. ñïðàâåäëèâî ñîîòíîøåíèå äëÿ èõ ôóíêöèé ïðèíàäëåæíîñòè: $\mu_Д(x)=$ $=\min\{\mu_{B_1}(x_i),\mu_{B_2}(x_i),\mu_{B_3}(x_i),\mu_{B_4}(x_i),\mu_{B_5}(x_i),$ $\mu_{B_6}(x_i)\}$. Ðàöèîíàëüíûì (îïòèìàëüíûì) ðåøåíèåì ñ÷èòàþò òó àëüòåðíàòèâó x^*, êîòîðàÿ óäîâëåòâîðÿåò óñëîâèþ: $\mu_Д\left(x^*\right)=\max_{x_i\in X}\min\{\mu_{G_1}(x),...,$ $\mu_{G_n}(x);\mu_{B_1}(x),...,\mu_{B_m}(x)\}$.

Çàìåòèì, ÷òî ïðè ìàòåìàòè÷åñêîì àíàëèçå ñèòóàöèè, ïðåäñòàâëåííîé â êàêîé-íèáóäü çàäà÷å, íåîáõîäèìî ó÷èòûâàòü íå÷åòêóþ öåëü è çàäàííûå íå÷åòêèå îãðàíè÷åíèÿ, ðàññìàòðèâàÿ âñåâîçìîæíûå êîìáèíàöèè öåëè è îãðàíè÷åíèé. Èëëþñòðàöèþ ýòîãî ó÷åòà ïîêàæåì ñ ïîìîùüþ ñëåäóþùåé çàäà÷è: èìååòñÿ n ðàáî÷èõ ìåñò è n ðàáî÷èõ, òðåáóåòñÿ òàê ðàñïðåäåëèòü ðàáî÷èõ ïî ìåñòàì, ÷òîáû îáåñïå÷èòü çàäàííóþ íå÷åòêîñòü ðàáîòû êîëëåêòèâà; èñõîäíîé èíôîðìàöèåé ÿâëÿåòñÿ òàêæå ýôôåêòèâíîñòü i-ãî ðàáî÷åãî íà j-ì ðàáî÷åì ìåñòå, îïðåäåëåííàÿ ïóòåì îïðîñà ýêñïåðòîâ.

Äëÿ îïðåäåëåííîñòè áóäåì ñ÷èòàòü, ÷òî ýôôåêòèâíîñòè ðàáîòû êîëëåêòèâà ÿâëÿþòñÿ íå÷åòêèìè ïîäìíîæåñòâàìè óíèâåðñàëüíîãî ìíîæåñòâà Õ îöåíîê: $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, ãäå x_1= (ýôôåêòèâíîñòü îòëè÷íàÿ), x_2= (ýôôåêòèâíîñòü î÷åíü õîðîøàÿ), x_3= (ýôôåêòèâíîñòü äîâîëüíî õîðîøàÿ), x_4= (ýôôåêòèâíîñòü äîâîëüíî ïëîõàÿ), x_5= (ýôôåêòèâíîñòü î÷åíü ïëîõàÿ). Â ðåçóëüòàòå îïðîñà ýêñïåðòîâ ïîñòðîåíû íå÷åòêèå ïîäìíîæåñòâà B_{ij} óíèâåðñàëüíîãî ìíîæåñòâà Õ, õàðàêòåðèçóþùèå ýôôåêòèâíîñòü ðàáîòû i-ãî ðàáî÷åãî íà j-ì ðàáî÷åì ìåñòå; äëÿ êàæäîãî ïîäìíîæåñòâà B_{ij} óêàçàíà ôóíêöèÿ ïðèíàäëåæíîñòè μ_{ij}, ïðè ýòîì ÷èñëî μ_{ij} õàðàêòåðèçóåò ñòåïåíü òîãî ôàêòà, ÷òî ýôôåêòèâíîñòü ðàáîòû i-ãî ðàáî÷åãî íà j-ì ðàáî÷åì ìåñòå ðàâíà $x_k\left(k=1,2,3,4,5\right)$. Óñëîâèìñÿ ñ÷èòàòü, ÷òî $n=3$. Öåëü ïîëó÷åíèÿ

Òàáëèöà 3

X	Условия (ограничения)			Цель	Решение
	μ_{11}	μ_{22}	μ_{33}	μ_G	$\mu_Д=\mu_{123}$
x_1	0,1	1	0,2	0,3	0,1
x_2	0,3	0,9	0,3	0,3	0,3
x_3	0,5	0,8	0,5	0,5	0,5
x_4	0,6	0,7	0,7	0,4	0,4
x_5	0,7	0,7	0,8	0,1	0,1

Òàáëèöà 4

X	μ_{123}	μ_{132}	μ_{312}	μ_{321}	μ_{231}	μ_{213}
x_1	0,1	0,1	0,3	0,3	0,3	0,2
x_2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
x_3	0,5	0,5	0,4	0,4	0,5	0,5
x_4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
x_5	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
max	0,5	0,5	0,4	0,4	0,5	0,5

çàäàííîé ðàáîòû êîëëåêòèâà çàäàíà â âèäå íå÷åòêîãî ïîäìíîæåñòâà G óíèâåðñàëüíîãî ìíîæåñòâà Õ ñ ôóíêöèåé ïðèíàäëåæíîñòè $\mu_G(x): X \to [0,1]$ (òàáë. 2).

Äëÿ íàõîæäåíèÿ ðåøåíèÿ çàäà÷è íåîáõîäèìî ó÷åñòü øåñòü âñåâîçìîæíûõ ïåðåñòàíîâîê, êîòîðûå ìîæíî ñîñòàâèòü èç òðåõ ÷èñåë 1, 2, 3, îçíà÷àþùèõ ñîîòâåòñòâåííî íîìåð ðàáî÷åãî ìåñòà è íîìåð ðàáî÷åãî, åñëè óñëîâèòüñÿ çàðàíåå â òàêîì óïîðÿäî÷åíèè. Íàïðèìåð, ïåðåñòàíîâêó (3, 1, 2) áóäåì èíòåðïðåòèðîâàòü òàê: òðåòèé ðàáî÷èé íàõîäèòñÿ íà ïåðâîì ðàáî÷åì ìåñòå, ïåðâûé ðàáî÷èé íàõîäèòñÿ íà âòîðîì ðàáî÷åì ìåñòå, à âòîðîé ðàáî÷èé - íà òðåòüåì ðàáî÷åì ìåñòå. Òàêîå èñòîëêîâàíèå îòíîñèòñÿ ê îñòàëüíûì ïÿòè ïåðåñòàíîâêàì: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 3, 1), (2, 1, 3). Ïðîöåññ íàõîæäåíèÿ ðåøåíèÿ çàäà÷è ñîñòîèò â îòûñêàíèè íàèáîëåå ýôôåêòèâíîé ïåðåñòàíîâêè ñðåäè øåñòè óêàçàííûõ. Ðàññìîòðèì äëÿ èëëþñòðàöèè ïåðåñòàíîâêó (1, 2, 3) (òàáë. 3)

Ðåçóëüòàòû àíàëèçà âñåõ øåñòè ïåðåñòàíîâîê ïî óêàçàííîé ñõåìå äàíû â òàáë. 4.

Èòîãè àíàëèçà ïðåäñòàâëåíû ïîñëåäíåé ñòðîêîé ýòîé òàáëèöû. Èòàê, ðåøåíèåì çàäà÷è ÿâëÿþòñÿ ÷åòûðå ïåðåñòàíîâêè (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), äëÿ êîòîðûõ íàèáîëüøóþ ñòåïåíü ïðèíàäëåæíîñòè èìååò òîëüêî x_3 = (ýôôåêòèâíîñòü äîâîëüíî õîðîøàÿ).

[1] Ñì.: Êîôìàí À. Ââåäåíèå â òåîðèþ íå÷åòêèõ ìíîæåñòâ. Ì., 1982; Îðëîâ À.È. Òåîðèÿ ïðèíÿòèÿ ðåøåíèé. Ì., 2006; Îðëîâ À.È. Ìàòåìàòèêà íå÷åòêîñòè. Íàóêà è æèçíü, 1982; ×åãîäàåâ À.È. Ìàòåìàòè÷åñêèå ìåòîäû è ìîäåëè ïîääåðæêè ïðèíÿòèÿ ðåøåíèé â óñëîâèÿõ íåîïðåäåëåííîñòåé: Ìîíîãðàôèÿ. ßðîñëàâëü, 2007; Êîðëûõàíîâ Ñ.Â. Ôàêòîðû, îïðåäåëÿþùèå ïðåäïðèíèìàòåëüñêóþ àêòèâíîñòü // Âåñòí. Ñàìàð. ãîñ. óí-òà. 2008. ¹ 8 (46).

Ïîñòóïèëà â ðåäàêöèþ 28.04.2009 ã.