

## ОБ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПО ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПРОЕКТАМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© 2008 А.И. Чегодаев\*

**Ключевые слова:** принятие решений, условия неопределенности, инвестиционные проекты, показатели инвестиционной эффективности, математические методы, матричная игра, решение игры, рентабельность, игра с “природой”, норма доходности.

Рассматривается новая методика принятия решений по инвестиционным проектам (в условиях неопределенности), в основе которой лежат идеи использования при выборе оптимальных инвестиционных проектов: 1) более двух показателей эффективности инвестиций; 2) взаимосвязей показателей эффективности инвестиций, 3) математических методов теории матричных игр, линейного программирования, теории вероятностей, математической статистики, численных методов и ЭВМ.

Проблема принятия решений по инвестиционным проектам в условиях неопределенности является актуальной для всех предприятий, в той или иной степени связанных с инвестиционной деятельностью. Оценка инвестиционных проектов посредством использования известных четырех показателей эффективности инвестиций широко применяется в мировой практике, при этом для повышения надежности при выборе варианта инвестиционного проекта фирмы ориентируются не на один, а на два показателя эффективности, применяя обычно один в качестве основного измерителя, а второй - в качестве вспомогательного показателя эффективности инвестиций<sup>1</sup>.

Настоящая работа представляет собой изложение новой методики принятия решений по инвестиционным проектам, в основе которой лежат идеи использования при выборе оптимальных инвестиционных проектов: 1) более двух показателей эффективности инвестиций; 2) взаимосвязей показателей эффективности инвестиций; 3) математических методов теории матричных игр, линейного программирования, теории вероятностей, математической статистики, численных методов и ЭВМ.

Инвестиционные процессы могут быть объектом количественного финансового анализа. С финансовой точки зрения, их объединяют два процесса: 1) создание производствен-

ного или иного объекта (накопление капитала), 2) последовательное получение дохода. Накопление капитала и получение дохода протекают последовательно (с разрывом между ними или без него) или на некотором отрезке времени параллельно. В последнем случае предполагается, что отдача от инвестиций начинается еще до момента завершения процесса вложений. Указанные два процесса могут иметь разные распределения потоков платежей во времени. Объектом анализа являются потоки платежей, характеризующие эти процессы в виде одной последовательности. Если речь идет о производственных инвестициях, то в большинстве случаев эти потоки формируются из показателей инвестиционных расходов и чистого дохода.

Анализ производственных инвестиций в основном заключается в оценке и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. В качестве измерителей здесь принимают как формальные характеристики, основанные на дисконтировании потоков ожидаемых поступлений и расходов, так и показатели, определяемые на основе данных бухгалтерского учета.

Какой бы метод оценки эффективности капитальных вложений ни был выбран, так или иначе он связан с приведением как инвестиционных расходов, так и доходов от капиталовложений к одному моменту времени. Наиболее важным здесь является выбор

\* Чегодаев Анатолий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Ярославского высшего зенитного ракетного училища противовоздушной обороны (военного института).

уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. Проблема риска является одной из основных при сравнении и выборе вариантов инвестиций.

В финансовом анализе эффективности инвестиций в основном применяют четыре показателя: чистый приведенный доход (*NPV*), срок окупаемости ( $n_{ок}$ ), внутренняя норма доходности (*IRR*), рентабельность (*U*).

Влияние инвестиционных затрат и доходов от них на *NPV* можно представить так:

$$NPV = \sum_{j=1}^{n_2} E_j V^{j+n_1} - \sum_{t=1}^{n_1} K_t V^t, \quad (1)$$

где  $K_t$  - инвестиционные расходы в периоде  $t$ ;  $E_j$  - доход в периоде  $j$ ;  $n_1$  - продолжительность процесса инвестиций;  $n_2$  - продолжительность периода отдачи от инвестиций;  $V$  - дисконтный множитель по ставке  $q$  (ставке сравнения).

В формуле (1) предполагается, что процесс отдачи идет сразу после окончания инвестиций, а показатель определен путем приведения соответствующих сумм к началу инвестиционного процесса. Вместе с тем представляется возможной и практически важной оценка *NPV* на момент завершения процесса вложений или на иной момент времени  $t$ . Тогда

$$(NPV)_t = (NPV)_0 (1+q)^t, \quad (2)$$

где  $(NPV)_0$  и  $(NPV)_t$  - величины чистого приведенного дохода, рассчитанные на начало инвестиционного процесса и некоторый момент времени  $t$  после него;  $q$  - ставка сравнения.

Разумеется, что при сравнении нескольких проектов момент оценки должен быть общим для всех проектов.

Под сроком окупаемости  $n_{ок}$  понимают продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме инвестиций.

Если распределение доходов не следует какой-либо закономерности, а  $K$  - размер инвестиций, приведенный к началу периода отдачи, то срок окупаемости  $n_{ок}$  определяется суммированием последовательных членов

ряда доходов, дисконтированных по ставке  $q$ , до тех пор, пока не будет получена сумма, равная объему инвестиций. Если доход поступает в конце года, то определяется сумма

$$S_m = \sum_{t=1}^m R_t V^t,$$

где  $R_t$  - доход от инвестиций на некоторый момент времени  $t$ , а  $S_m < K < S_{m+r}$

Срок окупаемости равен  $m$  плюс некоторая доля года, которая приблизительно равна

$$\frac{K - S_m}{R_{m+1} V^{m+1}}.$$

Если доходы от инвестиций одинаковы ( $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$ ) и поступают равномерно, один раз в конце каждого года, то срок окупаемости  $n_{ок}$  находится по формуле

$$n_{ок} = \frac{\ln\left(1 - \frac{K}{R} q\right)}{\ln(1+q)}. \quad (3)$$

Под внутренней нормой доходности *IRR* понимают ставку доходности  $q_b$ , при которой  $NPV = 0$ , т.е.

$$f(q) = \sum_{t=1}^t \frac{R_t}{(1+q)^t} - I_0 = 0, \quad \sum R_t V^t = 0,$$

где  $I_0$  - инвестиционные расходы, которые, как предполагается, осуществляются одновременно в момент начала проекта;  $R_t$  - доход в год  $t$ ;  $t$  - время, измеряемое от начала инвестиционного процесса;  $V$  - дисконтный множитель по ставке  $q_b$ ;  $R_t$  - член потока платежей, который может быть положительной и отрицательной величиной;  $t$  - время, измеряемое от начала инвестиционного процесса;  $q_b$  - решение уравнения.

Заметим, что для нахождения внутренней нормы доходности  $q_b$  обычно пользуются приближенными методами, в частности, методом последовательных итераций с применением табулированных значений дисконтирующих множителей. Для этого с помощью таблиц выбирают два значения коэффициента дисконтирования  $q_1 < q_2$  таким образом, что-

бы в интервале  $(q_1, q_2)$  функция  $NPV = f(q)$  меняла свое значение с “+” на “-” или с “-” на “+”. Далее применяется формула

$$IRR = q_1 + \frac{f(q_1)}{f(q_1) - f(q_2)}(q_2 - q_1),$$

где  $q_1$  - значение табулированного коэффициента дисконтирования, при котором  $f(q_1) > 0$  ( $f(q_1) < 0$ );  $q_2$  - значение табулированного коэффициента дисконтирования, при котором  $f(q_2) < 0$  ( $f(q_2) > 0$ ).

Точность вычислений обратно пропорциональна длине интервала  $(q_1, q_2)$ , а наилучшая аппроксимация с использованием табулированных значений достигается в случае, когда длина интервала достаточно минимальна (например, равна  $1\% = 0,01$ ).

Под рентабельностью  $U$  понимают отношение приведенных доходов к приведенным на ту же дату инвестиционным расходам:

$$U = \frac{R_j}{(1+q)^j} : \sum \frac{K_t}{(1+q)^t}, \quad (4)$$

где  $R_j$  - показатели чистого дохода;  $K_t$  - размеры инвестиционных затрат  $t = 1, 2, \dots, n_1$ ;  $j = 1, 2, \dots, n_2$ .

Если поток платежей таков, что они осуществляются в конце периодов, а временные интервалы между платежами одинаковы (поток платежей представляет собой постоянную годовую финансовую ренту постнумерандо), то показатель рентабельности вычисляется по формуле

$$U = R \frac{a_{n;q}}{K}, \quad (5)$$

где  $a_{n;q}$  - коэффициент приведения ренты, равной

$$\frac{1 - (1+q)^{-n}}{q};$$

$K$  - размер инвестиций;  $n$  - срок ренты, время отдачи от инвестиций от начала первого периода ренты до конца последнего периода.

Надежность количественного анализа эффективности инвестиций будет выше, если при выборе оптимальных вариантов инвестиций ориентироваться не на один, а на два и более

показателей эффективности. Это возможно, если учесть, что расчет четырех измерителей эффективности инвестиций базируется на приведении разновременных платежей к одному и тому же моменту времени и что показатели эффективности взаимосвязаны. Сравнительно простые связи между показателями эффективности можно установить в случае равномерного дискретного распределения поступлений доходов, когда поток платежей может быть представлен в виде той или иной постоянной финансовой ренты.

Зависимость “рентабельность - срок окупаемости” выражается в виде формулы

$$U = \frac{1 - (1+q)^{-n}}{1 - (1+q)^{-n_{ок}}}. \quad (6)$$

Зависимость “рентабельность - внутренняя норма доходности” представляется следующим образом:

$$U = \frac{q_b}{q} \cdot \frac{1 - (1+q)^{-n}}{1 - (1+q_b)^{-n}}. \quad (7)$$

Формула

$$n_{ок} = - \frac{\ln \left\{ 1 - \frac{q}{q_b} \left[ 1 - (1+q_b)^{-n} \right] \right\}}{\ln(1+q)} \quad (8)$$

устанавливает зависимость “срок окупаемости - внутренняя норма доходности”.

Введем в рассмотрение матричную игру с “природой”, в которой в качестве первого игрока выступает инвестор, чистыми стратегиями которого являются различные варианты инвестиционных проектов, а в качестве второго игрока выступает “природа”, чистыми стратегиями которой являются следующие показатели эффективности: внутренняя норма доходности  $q_b$ , рентабельность  $U$  и период окупаемости  $n_{ок}$ . Как известно, матричная игра полностью задается своей матрицей  $H_{m \times n} = (h_{ij})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ . В нашем случае эта матрица имеет размеры  $K \times 3$ , где  $K$  - число строк (число инвестиционных проектов),  $3$  - число столбцов матрицы (число показателей эффективности). Все элементы матрицы  $H_{K \times 3}$  должны быть выражены в единицах одной и той же “полезности”. Это можно осуществить,

если воспользоваться формулами (7), (8) и выразить элементы  $h_{ij}$ , соответствующие показателям рентабельности и срока окупаемости, через единицы “полезности” внутренней нормы доходности. Далее решаем игру с “природой” в чистых стратегиях. Если эта игра имеет седловую точку, то инвестор в качестве оптимального инвестиционного проекта выбирает тот, номер которого совпадает с номером строки, где расположен седловой элемент матрицы  $H_{K \times 3}$ .

В случае, если матричная игра с “природой” не имеет решений в чистых стратегиях, следует решать эту игру в смешанных стратегиях. С такой целью предварительно необходимо упростить игру, сократив число строк матрицы  $H_{K \times 3}$  посредством свойств решений матричной игры и сохранив число ее столбцов, а затем свести решение данной игры с другой матрицей  $H_{K' \times 3}$  к задаче линейного программирования. Если  $K' = 3$  и найдена оптимальная смешанная стратегия  $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  инвестора, где  $x_i^*$  - вероятность выбора инвестором  $i$ -го проекта инвестиций,  $i = 1, 2, 3$ , то инвестор одновременно будет использовать три проекта, соответственно, с вероятностями  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$ , удовлетворяющими условию  $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1$ . Затем следует решить задачу, двойственную рассмотренной задаче линейного программирования, и найти оптимальную смешанную стратегию “природы”, т.е. вычислить вероятности  $y_1^*, y_2^*, y_3^*$ , где  $y_1^* + y_2^* + y_3^* = 1$ , с которыми необходимо использовать показатели эффективности, чтобы достигнуть максимального экономического эффекта. Функция выигрыша

$H(x, y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij} x_i y_j$  позволяет найти мак-

симальный доход  $H(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij} x_i^* y_j^*$ ,

выраженный в единицах “полезности” внутренней нормы доходности. Наконец, для повышения надежности при выборе наилучших вариантов инвестиционных проектов

инвестор может ориентироваться сразу на все четыре показателя эффективности (срок окупаемости, внутреннюю норму доходности, рентабельность, чистый приведенный доход), если воспользоваться еще одной формулой, выражающей зависимость “чистый приведенный доход - внутренняя норма доходности”:

$$(NPV)_n = (NPV)_0(1 + q_b)^n, \quad (9)$$

где  $(NPV)_0$  - величина чистого приведенного дохода, рассчитанная на начало инвестиционного процесса по процентной ставке, равной внутренней норме доходности  $q_b$ , а  $(NPV)_n$  - величина чистого приведенного дохода на момент времени  $n$ , где  $n$  - общий срок отдачи от капиталовложений.

Задача ориентации инвестора сразу на четыре показателя эффективности сводится к решению игры с “природой” с матрицей  $H_{K \times 4}$ . Решение этой задачи аналогично решению задачи игры с “природой” с матрицей  $H_{K \times 3}$ . Элементы матрицы  $H_{K \times 4}$  с помощью формул (7), (8), (9) можно выразить через единицы “полезности” внутренней нормы доходности.

Выбор показателя  $q_b$  для этих целей объясняется тем, что внутренняя норма доходности пользуется у инвесторов наибольшей популярностью.

Преимущество использования указанных четырех показателей эффективности для окончательного решения о выборе оптимальных проектов инвестиций несомненно с экономической точки зрения, так как максимально происходит учет влияния всех показателей эффективности. При этом рекомендуется для использования не один инвестиционный проект, а несколько проектов, самых лучших, которые приносят максимальный доход, если указанные проекты применяются со строго определенными вероятностями, рассчитанными заранее. Расчеты должны осуществляться на современных электронно-вычислительных машинах по заранее разработанным программам. Эти расчеты с использованием ЭВМ необходимы также для нахождения внутренней нормы доходности  $q_b$  приближенными методами, в частности, методом последовательных

итераций с применением табуляционных значений дисконтирующих множителей.

Заметим, что результаты оценок показателей эффективности носят условный характер в том смысле, что они зависят от фактора времени, а указанные расчеты основаны на дисконтировании потока поступлений, использовании параметров будущих доходов, их размеров и времени поступления, выбора процентной ставки. Однако эти параметры изменяются под воздействием различных факторов, в частности, рынков сбыта, колебания цен и спроса на продукцию, сложившихся производственных систем, политической ситуации в стране и в мире, положения на кредитно-денежном и валютном рынках, изменения экономической конъюнктуры и т.п. В связи с этим надежность и оперативность

в расчетах и анализе должны быть достаточно высокими, чтобы полученные данные были фундаментальными для принятия инвестиционных решений.

---

<sup>1</sup> См.: *Ван Хорн Дж. К.* Основы управления финансами. М., 1996; *Липсиц В.В., Коссов В.В.* Инвестиционный проект: методы подготовки и анализа. М., 1996; *Нейман Дж., Morgenштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970; *Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. М., 1981; *Чегодаев А.И.* Основы теории конечных антагонистических игр и их применение к решению задач экономики и военного дела: Учеб. пособие. Ярославль, 1993; *Вагин С.Г.* Основные тенденции и условия развития управления крупными социально-экономическими системами // Вестн. Самар. гос. экон. ун-та. 2007. № 5 (31).