УДК 51-7

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ПРОБЛЕМЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

© 2008 А.И. Чегодаев*

Рассматриваются свойства решений матричной игры, полученные автором и изложенные в восьми теоремах. Эти свойства используются для упрощения матричной игры и нахождения ее решений в процессе разработки и принятия решений в условиях неопределенностей, в конфликтных ситуациях.

Рассмотрим проблему принятия решений в некоторой экономической или другой системе[1]. Обычно выделяют три объекта: 1) объект управления (управляемая подсистема), 2) управляющая подсистема, 3) среда. Управляющая подсистема действует на объект управления посредством альтернативных управляющих воздействий. Методика исследования задач принятия решений на основе математического моделирования состоит в реализации следующих трех этапов: 1) построения математической модели задачи принятия решения; 2) нахождения оптимального решения в соответствии с выбранным принципом оптимальности; 3) анализа полученных результатов. Для построения такой модели необходимо рассмотреть три множества: 1) множество X альтернатив; 2) множество Y исходов (результатов); 3) множество Z возможных состояний среды. Всякий результат $y \in Y$ существенно зависит от выбора альтернативы $x \in X$ и возможного состояния среды $z \in Z$. Поэтому в общем случае будем считать, что существует функция $y = F(x,z)$, характеризующая указанную зависимость, при этом предполагается, что параметр Z является неизвестным в момент принятия решения. Функцию $y = F(x,z)$ называют функцией реализации или отображением $F: X \times Z \to Y$, которое каждой упорядоченной паре вида (x,z) ставит в соответствие исход y. Набор объектов составляет реализационную структуру задачи принятия решения, выражающую связь между выбираемыми альтернативами, состоянием среды, обстановки и получаемыми результатами. Рассмотрим тот случай, когда структура среды такова, что действуют активно в условиях неопределенностей несколько управляющих подсистем, противников, имеющих противоположные интересы. В этом случае задача принятия решения описывается указанной функцией реализации $y = F(x,z)$ в ситуации, когда один субъект осуществляет выбор альтернативы $x \in X$, а другой субъект выбирает альтернативу $z \in Z$ в условиях конфликта и в условиях неопределенности: выбор альтернативы одним субъектом характеризует неопределенность обстановки для другого субъекта, т.е. субъекты находятся в условиях неопределенности типа “активный партнер”. Проблема принятия решений в условиях такой неопределенности осуществляется посредством теории игр - математической дисциплины, предметом изучения которой служат математические модели конфликтных ситуаций. Если множество альтернатив X, множество исходов Y и множество Z состояний среды конечны, то ситуацию выбора альтернативы в условиях неопределенности можно представить с помощью таблицы (или матрицы A), иллюстрирующей действие функции $y = F(x,z)$, где $x \in X$, $z \in Z$, $y \in Y$. Будем считать, что множества X, Z таковы: $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$. Тогда множество Y имеет mn элементов: . Множество исходов Y интерпретируется матрицей $Y_{m \times n}$ размера $m \times n$. Если выбрана альтернатива , а состояние среды при этой альтернативе есть Z_j, то соответствующий исход Y_{ij} находится в матрице на пересечении i-й строки и j-го

* Чегодаев Анатолий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, преподаватель Ярославского высшего зенитного ракетного училища противовоздушной обороны (военного института).

столбца. Заметим, что многие проблемы теории игр решаются в рамках матричных игр, которые задаются своими матрицами. В данной статье сообщаются результаты исследования автора о свойствах решений матричной игры.

Решением матричной игры называют набор объектов $\left\{x^*, y^*, V_* = H\left(x^*, y^*\right)\right\}$,

где x^* - оптимальная смешанная стратегия первого игрока, y^* - оптимальная смешанная стратегия второго игрока, $V_* = H\left(x^*, y^*\right)$ - выигрыш первого игрока в ситуации $\left(x^*, y^*\right)$, называемый значением матричной игры. Оптимальными в игре $\Gamma =< X, Y, H(x, y) >$ называют любые стратегии x^*, y^* $\left(x^* \in X, y^* \in Y\right)$, если выполняются неравенства

$$H\left(x, y^*\right) \le H\left(x^*, y^*\right) \le H\left(x^*, y\right),\ x \in X,$$

$$y \in Y.$$

Заметим, что матричная игра упрощается за счет возможного уменьшения размеров ее матрицы, если строки и столбцы данной матрицы связаны определенными соотношениями.

Автором статьи сформулированы и доказаны восемь теорем, которые выражают свойства набора объектов $\left\{x^*, y^*, V_*\right\}$, являющегося решением матричной игры.

Теорема 1. Для того чтобы набор объектов $\left\{x^*, y^*, V_*\right\}$ являлся решением игры в смешанных стратегиях с матрицей $A_{m\times n}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\left(e^i_{m\times1}\right)' A_{m\times n} y^*_{n\times1} \le V_* \le \left(x^*_{m\times1}\right)' A_{m\times n} e^j_{n\times1},$$

$$i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n,$$

где $e^i_{m\times1}$ - i-й единичный орт m-мерного евклидова пространства E_m; $e^j_{n\times1}$ - j-й единичный орт n-мерного евклидова пространства ; “′” - обозначение операции транспонирования матрицы; - матрица, имеющая n строк и один столбец (оптимальная смешанная стратегия второго игрока); $x^*_{m\times1}$ - матрица, имеющая m строк и один столбец (оптимальная смешанная стратегия первого игрока); V_* - цена игры; $A_{m\times n}$ - матрица, имеющая m строк и n столбцов.

Теорема 2. Если набор объектов $\left\{x^*, y^*, V_*\right\}$ есть решение игры с матрицей выигрышей $A_{m\times n}$ и если k-я координата оптимальной смешанной стратегии x^* первого игрока положительна $\left(x^*_k > 0\right)$, а $a_{k1}y^*_1 + a_{k2}y^*_2 + \dots + a_{kn}y^*_n = V_*$, $y^* = \left\{y^*_1, y^*_2, \dots, y^*_n\right\}$, то выполняется следующее равенство:

$$V_* = \left(e^k_{m\times1}\right)' A_{m\times n} y^*_{n\times1},$$

где V_* - цена игры, $y^*_{n\times1} = \left\{y^*_1, y^*_2, \dots, y^*_n\right\}$ - оптимальная смешанная стратегия второго игрока, $e^k_{m\times1}$ - k-й единичный орт m-мерного евклидова пространства E_m.

Теорема 3. Если множество объектов $\left\{x^*, y^*, V_*\right\}$ есть решение игры с матрицей выигрышей $A_{m\times n}$ и если l-я координата y^*_l оптимальной смешанной стратегии y^* второго игрока положительна $\left(y^*_l > 0\right)$, а $a_{1l}x^*_1 + a_{2l}x^*_2 + \dots + a_{ml}x^*_m = V_*$, то выполняется следующее равенство:

$$V_* = \left(x^*_{m\times1}\right)' A_{m\times n} e^l_{n\times1},$$

где V_* - цена игры, $x^* = \left\{x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_m\right\}$ - оптимальная смешанная стратегия первого игрока, e^l - l-й единичный орт n-мерного евклидова пространства E_n.

Теорема 4. Если множество $\Gamma = \left\{x^*, y^*, V_*\right\}$ - решение игры с матрицей $A_{m\times n}$ и если k-я координата x^*_k вектора

$x^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*\}$ равна нулю $(x_k^* = 0)$, а l-я координата y_l^* вектора $y^* = \{y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*\}$ также равна нулю $(y_l^* = 0)$, то множество $\Gamma_1 = \{\tilde{x}^*, \tilde{y}^*, V_*\}$ является решением игры с матрицей B, полученной из матрицы $A_{m\times n}$ путем вычеркивания k-й строки и l-го столбца,

где $\tilde{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_{k-1}^*, x_{k+1}^*, ..., x_m^*)$,

$\tilde{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_{l-1}^*, y_{l+1}^*, ..., y_n^*)$,

$k = 1,2,...,m$, $l = 1,2,...,n$.

Определение. Простым решением игры с матрицей $A_{m\times n}$ называется такое решение $\{x^*, y^*, V_*\}$, которое удовлетворяет равенствам

$$V_* = \left(e_{m\times 1}^i\right)' A_{m\times n} y_{n\times 1}^*, \quad i = 1,2,...,m;$$

$$V_* = \left(x_{m\times 1}^*\right)' A_{m\times n} e_{n\times 1}^j, \quad j = 1,2,...,n.$$

Теорема 5. Если игра с квадратной невырожденной матрицей допускает простое решение, то это решение единственно и имеет вид

$$x^* = V_*\left(A'_{m\times n}\right)^{-1} d'_{n\times 1}, \quad y^* = V_* A_{n\times n}^{-1} d'_{n\times 1},$$

$$V_* = \frac{1}{d_{1\times n} A_{n\times n}^{-1} d_{n\times 1}},$$

где $d_{1\times n} = (1,1,...,1)$.

Теорема 6. Если набор объектов $\Gamma_A = \{x^*, y^*, V_*\}$ является решением игры с матрицей $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$ в смешанных стратегиях, то множество $\Gamma_B = \{x^*, y^*, kV_* + \alpha\}$ является решением игры в смешанных стратегиях с матрицей $B_{m\times n} = (ka_{ij} + \alpha)$, где число $k > 0$, α - любое действительное число, ; $j = 1,2,...,n$.

Теорема 7. Если множество $\Gamma_B = \{x^*, y^*, kV_* + \alpha\}$ является решением игры с матрицей $B_{m\times n} = (ka_{ij} + \alpha)$ в смешанных стратегиях, где число $k > 0$, α - любое действительное число, ; $j = 1,2,...,n$, то множество $\Gamma_A = \{x^*, y^*, V_*\}$ является решением игры в смешанных стратегиях с матрицей $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Справедливость взаимно обратных теорем 6 и 7 свидетельствует о том, что верна следующая теорема, выражающая необходимый и достаточный признак того, когда тройка объектов $\{x^*, y^*, V_*\}$ является решением игры в смешанных стратегиях с матрицей $A_{m\times n}$.

Теорема 8. Для того, чтобы множество $\Gamma_A = \{x^*, y^*, V_*\}$ было решением в смешанных стратегиях игры с матрицей $A_{m\times n} = (a_{ij})$, необходимо и достаточно, чтобы множество $\Gamma_B = \{x^*, y^*, kV_* + \alpha\}$ было решением игры в смешанных стратегиях с матрицей $B_{m\times n} = (ka_{ij} + \alpha)$, где k - положительное действительное число $(k > 0)$, α - любое действительное число, ; $j = 1,2,...,n$, x^* - оптимальная смешанная стратегия первого игрока, y^* - оптимальная смешанная стратегия второго игрока, V_* - цена игры с матрицей $A_{m\times n}$.

Анализ теорем 1 и 8 показывает, что они по-разному выражают необходимые и достаточные условия существования решений игры $\{x^*, y^*, V_*\}$ в смешанных стратегиях с матрицей $A_{m\times n}$.

Теоремы 1-8 существенно используются для упрощения матричной игры и нахождения ее решений. Дело в том, что любая матричная игра, заданная своей матрицей $A_{m\times n}$, может быть в принципе решена в чистых или смешанных стратегиях. Однако непосредственное нахождение решений матричной игры зависит от размеров матрицы $A_{m\times n}$. Поэтому необходимы математические методы, позволяющие сводить решение одной матричной игры к решению другой матричной игры, заданной матрицей B, имеющей меньшие размеры, таким образом, чтобы множество решений игры с матрицей B было, по крайней мере, включено во множество решений игры с матрицей $A_{m\times n}$ или совпадало с последним множеством.

Замечание. В случае, когда задача принятия решения описывается функцией реализации $y = F(x, z)$, а параметром z управляют "природа", среда, то конфликтные ситуации разрешаются посредством игр с "природой".

Если каждый исход y необходимо оценить действительным числом, то рассматривается композиция двух отображений $J \circ F$, где $F: X \times Z \to Y$, $J: Y \to R$, R - множество действительных чисел. Тогда, если отождествить исход y и его оценку r, функция реализации $F(x, z)$ преобразуется в вещественную целевую функцию $J(x, z)$, которая максимизируется или минимизируется по x в зависимости от смысла решаемой задачи и является, по существу, функционалом двух переменных. Это означает, что задача принятия решений может быть сформулирована в виде задачи оптимизации и решена методом оптимизации.

[1] См.: *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970; *Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. М., 1981; *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М., 1985; *Чегодаев А.И.* Основы теории конечных антагонистических игр и их применение к решению задач экономики и военного дела: Учеб. пособие. Ярославль, 1993; *Кузьмина Н.М.* Системный подход к управлению изменениями // Вестн. Самар. гос. экон. ун-та. Самара, 2007. № 3 (29).