УДК 519.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДДЕРЖКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПОСРЕДСТВОМ СВЯЗЕЙ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНЫХ ИГР И ПРИНЦИПА ДОМИНИРОВАНИЯ

© 2008 А.И. Чегодаев*

Ключевые слова: математическая поддержка, принятие решений, условия неопределенности , требования доминирования, теорема, матричная игра, последовательное упрощение, принцип максимина, комбинация столбцов, решение игры.

Рассматриваются связи между решениями двух матричных игр, если строки или столбцы матриц этих игр удовлетворяют требованиям доминирования. Результаты исследования указанных связей изложены автором в пяти теоремах. Приведен пример нахождения решения данной матричной игры с помощью свойств матричных решений, указанных связей между решениями и последовательного упрощения данной игры.

Математическая поддержка принятия решений в условиях неопределенностей может быть осуществлена посредством принципа доминирования, теории матричных игр, связи между решениями двух матричных игр, заданных своими матрицами, строки или столбцы которых удовлетворяют требованию доминирования[1].

При нахождении решения матричной игры обычно придерживаются принципа максимина и принципа равновесия. Однако эти принципы, примененные к смешанному расширению матричной игры, равносильны. Если придерживаться принципов максимина и равновесия, то автоматически будем придерживаться и принципа доминирования, более естественного и простого. Принцип доминирования сформулируем так: игрок не должен использовать с положительной вероятностью те чистые стратегии, применяя которые он при всех действиях другого игрока выигрывает строго меньше, чем при использовании некоторой другой стратегии. В отличие от принципов максимина и равновесия принцип доминирования не приводит к понятию ситуации, которая удовлетворяет этому принципу. Принцип доминирования - это принцип запрета.

Рассмотрим три определения, которые относятся к принципу доминирования.

Определение 1. Говорят, что арифметический вектор $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ превосходит (доминирует) арифметический вектор $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, если $a_i \geq b_i (i = 1,2,...,n)$; если $a_i > b_i$ для любого i, то строго превосходит b.

Определение 2. Стратегия первого игрока строго доминирует стратегию x^2, если выполняется неравенство $H(x^1, y) > H(x^2, y)$, $\forall y \in Y$, $x^1, x^2 \in X$, где H - функция выигрыша; y - любая стратегия второго игрока; X, Y - множества стратегий, соответственно, первого и второго игроков.

Определение 3. Стратегия y^1 второго игрока строго доминирует стратегию y^2, если $H(x, y^1) < H(x, y^2)$, $\forall x \in X$; $y^1, y^2 \in Y$.

Автором статьи сформулированы и доказаны следующие пять теорем, которые устанавливают связь между решениями двух матричных игр, если строки или столбцы их матриц удовлетворяют требованию доминирования и выполняются некоторые другие условия.

Теорема 1. Пусть i-ю строку матрицы $A_{m \times n}$ превосходит выпуклая линейная комбинация других строк этой матрицы и пусть B - матрица, полученная из матрицы $A_{m \times n}$ удалением i-й строки, множество $\{x^B, y^B, v_B\}$ - решение игры с матрицей B, v_B - цена игры,

* Чегодаев Анатолий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Ярославского высшего зенитного ракетного училища противовоздушной обороны (военного института).

x^B - оптимальная смешанная стратегия первого игрока, y^B - оптимальная смешанная стратегия второго игрока, а $x^* = \left(x_1^B, x_2^B, ..., x_{i-1}^B, 0, x_i^B, ..., x_{m-1}^B\right)$ - арифметический вектор размерности m, полученный из вектора размерности m-1 путем добавления координаты, равной нулю и расположенной между координатами x_{i-1}^B и x_i^B с номерами $i-1$ и i.

Тогда множество $\left\{x^*, y^B, v_B\right\}$ есть решение игры с матрицей $A_{m\times n}$.

Теорема 2. Если j-й столбец матрицы $A_{m\times n}$ доминирует выпуклую линейную комбинацию других столбцов этой матрицы, а множество $\left\{x^c, y^c, v_c\right\}$ - решение игры с матрицей *C*, полученной из матрицы $A_{m\times n}$ после удаления j-го столбца, $y^* = \left(y_1^c, y_2^c, ..., y_{j-1}^c, 0, y_j^c, ..., y_{n-1}^c\right)$ - арифметический вектор размерности *n*, полученный из вектора $y^c = \left(y_1^c, y_2^c, ..., y_{j-1}^c, y_j^c, ..., y_{n-1}^c\right)$ путем добавления координаты, равной нулю и расположенной между координатами y_{j-1}^c и y_j^c с номерами *j-1* и *j*, то набор объектов $\left\{x^c, y^*, v_c\right\}$ есть решение игры с матрицей $A_{m\times n}$.

Теорема 3. Если i-ю строку матрицы $A_{m\times n}$ превосходит выпуклая линейная комбинация других строк этой матрицы, то найдется такая оптимальная смешанная стратегия x^* первого игрока в матричной игре, в которой ее i-я координата x_i^* равна нулю.

Теорема 4. Если в игре с матрицей $A_{m\times n}$ ее i-ю строку строго превосходит выпуклая линейная комбинация других строк, то в любой оптимальной смешанной стратегии x^* первого игрока i-я координата равна нулю.

Теорема 5. Если в игре с матрицей $A_{m\times n}$ j-й столбец матрицы $A_{m\times n}$ превосходит выпуклую линейную комбинацию других столбцов этой матрицы, то в любой оптимальной смешанной стратегии y^* второго игрока j-я координата равна нулю.

Заметим, что свойства решений матричной игры и результаты, полученные автором статьи в теоремах 1-5, помогают нахождению решения данной матричной игры с помощью сведения ее решения к решению другой игры с матрицей меньших размеров. По существу, сведение матричной игры к другой состоит в работе с матрицей данной игры. В частности, операции исключения чистых игроков соответствует вычеркивание из матрицы $A_{m\times n}$ строк и столбцов, при этом следует учитывать, что исключение доминируемых стратегий может привести к потере некоторых решений данной матричной игры; однако если исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменяется. После операции исключения из матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ некоторых строк и столбцов следует установить, имеет ли игра с полученной матрицей *H* решение в чистых стратегиях. Для этого устанавливаем, выполняется ли равенство

$$v_1 = \max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij} = v_2,$$

т.е. проверяем, совпадает ли нижняя цена игры $v_1 = \max_i \min_j h_{ij}$ с верхней ценой игры $v_2 = \min_j \max_i h_{ij}$. Если $v_1 = v_2$, то игра с матрицей *H* имеет решение в чистых стратегиях, а поэтому и данная игра с матрицей $A_{m\times n}$ разрешима в чистых стратегиях. Если $v_1 \neq v_2$, то придется прибегнуть к смешанным стратегиям, зная, что, согласно теореме Неймана, игра в смешанных стратегиях имеет, по крайней мере, одно решение. В таком случае, если игра сложная, пользуются методами линейного программирования для нахождения решения матричной игры. Однако если игра достаточно простая (но $v_1 \neq v_2$) и имеет некоторую обозримую аналитическую структуру, то иногда можно предвидеть оптимальные смешанные стратегии игроков, или, как часто говорят, спектр оптимальных стратегий. Естественно, последний случай не является общим. При этом под спектром смешанной стратегии $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ первого игрока в матричной игре понимают множество всех его чистых стратегий, вероятность применения которых, согласно этой стратегии, положительна. Аналогично определяют спектр смешанной стратегии второго игрока в матричной игре. Заметим, что строго доминируемые чистые стратегии игрока не содержатся в спектре какой-нибудь его оптимальной смешанной стратегии. Эти чистые стратегии не применяются, так как их вероятности равны нулю и исключаются в процессе упрощения матричной игры.

Рассмотрим пример нахождения решений игры, заданной матрицей

$$A_{4\times4} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 20 & 23 \\ 25 & \frac{35}{2} & 15 & 20 \\ 20 & 20 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & \frac{25}{2} \end{pmatrix}.$$

В данной игре $\Gamma_A = \{X, Y, H\}$ множества $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ являются множествами чистых стратегий игроков, а функция выигрыша задана матрицей $A_{4\times4}$.

Можно проверить, что нижняя цена игры $v_1 = 15$ не равна верхней цене игры $v_2 = 20$, поэтому будем далее применять смешанные стратегии. Упрощение игры осуществим, преобразуя матрицу $A_{4\times4}$ следующим образом: сначала ко всем элементам матрицы прибавим число $\alpha = -10$, а затем полученную матрицу умножим на число $k = \frac{1}{5} > 0$, в результате получим матрицу

$$B_{4\times4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

задающую игру, оптимальные стратегии игроков которой совпадают соответственно с оптимальными стратегиями игроков в игре с матрицей $A_{4\times4}$. Очевидно, что элементы четвертой строки матрицы $B_{4\times4}$ не больше соответствующих элементов третьей строки, поэтому третья чистая стратегия первого игрока доминирует четвертую строку. Рассмотрим выпуклую линейную комбинацию 1-й, 2-й и 3-й строк - векторов матрицы $B_{4\times4}$: $0\times b_1 + 0\times b_2 + 1\times b_3$ с коэффициентами $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Очевидно, что эта выпуклая комбинация превосходит четвертую строку матрицы $B_{4\times4}$. Следовательно, игра с матрицей C, полученной из матрицы $B_{4\times4}$ вычеркиванием четвертой строки, имеет оптимальные смешанные стратегии x_C^*, y_C^*, которые являются оптимальными стратегиями и для игры с матрицей $B_{4\times4}$, если предварительно добавить к вектору x^* четвертую нулевую координату.

Теперь будем упрощать матрицу

$$C_{3\times4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как элементы первого столбца матрицы $C_{3\times4}$ не меньше соответствующих элементов второго столбца, то вторая чистая стратегия второго игрока доминирует его первую чистую стратегию. Пусть $1\times c_2 + 0\times c_3 + 0\times c_4$ - выпуклая линейная комбинация векторов-столбцов матрицы $C_{3\times3}$ с коэффициентами $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = 0$. Видно, что первый вектор-столбец этой матрицы превосходит выпуклую комбинацию остальных столбцов. Удалив первый столбец, получим матрицу

$$D_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные стратегии x_D^*, y_D^* игры с матрицей $D_{3\times3}$ являются также оптимальными стратегиями для игры с матрицей $C_{3\times4}$, если предварительно добавить к вектору y_D^* первую нулевую координату. Продолжим анализ вектор-строк матрицы $D_{3\times3}$. Очевидно, что выпуклая комбинация первой и третьей строк с коэффициентами $\gamma_2 = \frac{1}{2}$, $\gamma_3 = \frac{1}{2}$:

: $\left(\frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_3\right)$ превосходит вторую вектор-строку. Удалив из матрицы $D_{3\times3}$ вторую строку, получим матрицу

$$E_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

задающую игру, оптимальные стратегии x_E^*, y_E^* которой являются также и оптимальными стратегиями игры с матрицей $D_{3\times3}$, если считать добавленную вторую координату вектора x_E^* равной нулю.

В матрице $E_{2\times3}$ третий столбец превосходит выпуклую линейную комбинацию остальных столбцов $0\times e_1 + 1\times e_2$ с коэффициентами *0, 1*. После удаления третьего столбца получим матрицу

$$F_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

задающую игру, у которой оптимальные стратегии x_F^*, y_F^* будут таковы, что они являются оптимальными и для игры с матрицей $E_{2\times3}$, если только внести одно изменение: считать третью координату вектора y_F^* равной нулю.

Итак, матрица $A_{4\times4}$ данной игры преобразована в матрицу $F_{2\times2}$ другой игры, которая не имеет решений в чистых стратегиях. Напомним, что первая строка матрицы $F_{2\times2}$ соответствует 1-й чистой стратегии первого игрока, вторая строка матрицы $F_{2\times2}$ - 3-й чистой стратегии первого игрока. Следовательно, оптимальная смешанная стратегия первого игрока первоначальной игры обладает характерным свойством: вторая и четвертая ее координаты равны нулю:

$$x^* = \left(x_1^*, 0, x_3^*, 0\right).$$

Аналогично первый столбец матрицы $F_{2\times2}$ соответствует второй чистой стратегии данной игры, второй столбец матрицы $F_{2\times2}$ соответствует третьей чистой стратегии данной игры, а оптимальная смешанная стратегия y^* второго игрока данной игры имеет вид $y^* = \left(0, y_2^*, y_3^*, 0\right)$, где первая и четвертая координаты равны нулю. Осталось найти решение игры с матрицей $F_{2\times2}$. Можно доказать, что в качестве решения данной игры выступает множество

$$\Gamma_F = \left\{x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), v_* = \frac{3}{2}\right\},$$

так как матрица $F_{2\times2}$ является симметричной. В связи с этим математическое ожидание выигрыша первого игрока в ситуации $\left(x^*, y^1\right)$ или в ситуации $\left(x^*, y^2\right)$, когда первый игрок применяет свою смешанную стратегию $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а игрок второй применяет свою первую $y^1 = (1,0)$ или вторую чистую стратегию $y^2 = (0,1)$, будет вычисляться так:

$$F\left(x^*, y^*\right) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \times 1, \quad i = 1,\ 2;$$

$$F\left(x^*, y^1\right) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$F\left(x^*, y^2\right) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 2\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично можно убедиться, что математическое ожидание проигрыша второго игрока в игре Γ_F равно $\frac{3}{2}$, если его смешанная стратегия $y = (y_1, y_2)$ такова, что $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$, а первый игрок применяет любую свою чистую стратегию.

Если не принимать во внимание симметричность матрицы $F_{2\times2}$, оптимальное решение игры с матрицей $F_{2\times2}$ можно найти, составив и решив две взаимодвойственные задачи линейного программирования.

Наконец, можно утверждать, что стратегия $x^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ является оптимальной стратегией первого игрока, а стратегия $y^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ - оптимальной стратегией второго игрока данной игры с матрицей $A_{4\times4}$. Осталось найти значение этой игры. Очевидно, что значение игры, равное $\frac{3}{2}$, с матрицей $F_{2\times 2}$ совпадает со значением игры с матрицей $B_{4\times 4}$, так как матрица $A_{4\times 4}$ получается из матрицы $B_{4\times 4}$ посредством умножения всех ее элементов на число $k=5$ и последующего прибавления к полученным произведениям числа $б=10$, т.е. всякий элемент a_{ij} матрицы $A_{4\times 4}$ равен $a_{ij}=5b_{ij}+10$, $i=1, 2, 3, 4$, $j=1, 2, 3, 4$, где b_{ij} - общий элемент матрицы $B_{4\times 4}$. Тогда значение игры с матрицей $A_{4\times 4}$ равно

$$v_1^* = kv_* + \alpha = 5\times\frac{3}{2} + 10 = 17{,}5 .$$

Итак, найдено решение $\{x^*, y^*, v_1^*\}$ данной игры с матрицей $A_{4\times 4}$. Здесь

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right),\ y^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),\ v_1^* = 17{,}5 .$$

Следует заметить, что при нахождении решения данной матричной игры использованы свойства решений матричной игры и результаты пяти теорем, изложенные в данной статье автором и устанавливающие связи между решениями двух матричных игр, если строки или столбцы этих матриц удовлетворяют требованиям доминирования.

---

[1] См.: *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970; *Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. М., 1981; *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М., 1985; *Чегодаев А.И.* Основы теории конечных антагонистических игр и их применение к решению задач экономики и военного дела: Учеб. пособие. Ярославль, 1993; *Кузьмина Н.М.* Системный подход к управлению изменениями // Вестн. Самар. гос. экон. ун-та. Самара, 2007. № 3 (29).