УДК 330.111.4:330.14

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ПРИРАЩЕНИЯ КАПИТАЛА

© 2010 А.С. Бунин*

Ключевые слова: капитал, модель Гудвина - Калецкого, постоянные издержки.

Предложен новый метод решения уравнений модели Гудвина - Калецкого с учетом эффектов запаздывания.

Одной из наиболее известных и изученных моделей приращения капитала является модель Гудвина - Калецкого[1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = \mu\left(\dfrac{1}{\tau}\left[K(t+\tau) - K(t)\right] + \right. \\ \left. + A(t) - (1-c)Y(t)\right); \\ \dfrac{dK(t+\tau)}{dt} = \alpha\left((1-c)Y(t)\right) - \\ - kK(t) + B_{ext}(t), \end{cases} \qquad (1)$$

где Y - количество продукции, производимой в единицу времени; K - капитал (объем основных фондов); A - постоянные издержки; c - доля продукции, расходуемая на собственные нужды; $\alpha(1-c)$ - доля средств, расходуемая на инвестиции; k - коэффициент выбытия основных фондов; $B_{ext}(t)$ - скорость приращения капитала в результате привлечения внешних инвестиций; τ - время задержки в системе "инвестиции - капитал"; μ^{-1} - характерное время запаздывания в системе "спрос - предложение".

Логика построения таких моделей подробно изложена в работах Гудвина, Калецкого, Аллена[2].

В среднесрочных инвестиционных проектах роль времени запаздывания τ очень велика. Дело в том, что такой проект занимает 2-4 года. В течение этого периода капитал растет, в основном, за счет привлечения средств. В этом случае на отрезке времени $t \in [0, \tau]$ приращение капитала будет определяться темпами производства и, в конечном счете, величиной $B_{ext}(t)$. При временах $t > \tau$ это будет величина Y.

Как правило, в договоре об инвестиционном кредитовании, рассчитанном на 5, а то и на 10 лет, погашение кредита идет слабо зависящими от времени платежами. Поэтому модель нулевого приближения приращения капитала упрощается:

$$\frac{dK(t+\tau)}{dt} = \alpha(1-c)Y + B_{ext}(t) - kK(t). \qquad (2)$$

Произведем преобразование Лапласа уравнения (2):

$$\int_0^{\infty} \frac{dK(t+\tau)}{dt} \exp(-\lambda t)dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\alpha(1-c)Y + B_{ext}(t) - kK(t)\right] \exp(-\lambda t)dt.$$

Обозначим через $\tilde{K}(\lambda)$ лапласовский образ капитала, как функции времени t:

$$\tilde{K}(\lambda) = \int_0^{\infty} K(t)\exp(-\lambda t)dt.$$

Допустим, что инвестиционные потоки $Z \equiv \alpha(1-c)Y + B_{ext} \approx const$, а первоначальные инвестиции таковы, что стоимость возрастает по закону $K(t) \equiv K_0(t) = K_{00} + kt$ при $0 \le t \le \tau$; $K_0(t > \tau) = 0$. В рассматриваемой нами задаче это приближение допустимо при условии поддержания стабильных темпов роста производства. В данном приближении решение уравнения (2) в лапласовских образах имеет вид[3]:

$$\tilde{K}(\lambda) = \frac{\lambda e^{\lambda\tau} \tilde{K}_0(\lambda) + Z/\lambda + K(\tau)}{\lambda e^{\lambda\tau} + k}, \qquad (3)$$

* Бунин Александр Сергеевич, аспирант Самарского государственного аэрокосмического университета им. акад. С.П. Королева (национального исследовательского университета). E-mail: bunin_88@mail.ru.

где $\tilde{K}_0(\lambda) = \int_0^{\theta} e^{-\lambda t} K(t)dt$. (4)

В рамках сделанных предположений:

$$\tilde{K}_0(\lambda) = \frac{K_{00}}{\lambda} - \frac{K_{00}+\kappa\theta}{\lambda} e^{-\lambda\theta} + \frac{\kappa(1-e^{-\lambda\theta})}{\lambda^2}. \quad (5)$$

Для вычисления временной зависимости приращения капитала необходимо знать положение полюсов выражения (3). Для их нахождения исследуем уравнение:

$$\lambda e^{\lambda\theta} + k = 0. \quad (6)$$

Вначале представим это уравнение в виде $pe^p = -D$, где $D = k\theta \geq 0$. Исследуем функцию $f(p) = pe^p$. Очевидно, что $f'(p) = (p+1)e^p$, поэтому на вещественной оси функция $f(p)$ достигает минимума при $p_0 = -1$. В этой точке $f(p_0 = -1) = -e^{-1}$. Следовательно, если $D = k\theta < e^{-1}$, то уравнение (6) имеет два вещественных корня. Если $k\theta = e^{-1}$, то имеем один кратный корень (нулю равны и сама функция, и ее производная). Если же $D = k\theta > e^{-1}$, то корни уравнения (6) являются комплексными. Исследуем их поведение. Для этого представим параметр p в виде:

$$p = -(a+ib). \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) преобразуется в систему уравнений:

$$\begin{cases} b\cos b - a\sin b = 0; \\ (a\cos b + b\sin b)e^{-a} = D. \end{cases} \quad (8)$$

Из первого уравнения этой системы следует, что $b = a \cdot tg b$. Отсюда второе уравнение системы (8) можно преобразовать к виду, удобному для анализа:

$$a \cdot e^{-a} = D\cos b. \quad (9)$$

Покажем это. Для этого подставим первое уравнение системы (8), приведенное к виду $b = a \cdot tg b$, во второе уравнение системы (8). В результате получим:

$$(a\cos b + a \cdot tg b \cdot \sin b)e^{-a} = D.$$

Умножая правую и левую части этого уравнения на $\cos b$, и принимая во внимание тождества $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$, мы приходим к уравнению (9).

Очевидно, что уравнение (9) позволяет определить границы знакопостоянства вещественной части корней уравнения (8). В самом деле, при $a = 0$ имеем $b = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $D = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, при $e^{-1} < D < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $\mathrm{Re}(a) > 0$, а при $D > \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\mathrm{Re}(a) < 0$.

Замечательной особенностью рассматриваемой задачи является то, что для нее характерно соотношение $k\theta < e^{-1}$. То есть экономически разумные значения параметров k и θ таковы, что выражение (3) имеет два вещественных полюса. То есть уравнение $\lambda e^{\lambda\theta} + k = 0$ имеет ровно два вещественных корня (λ_1, λ_2), причем оба они отрицательные.

Формальное аналитическое решение уравнения (2) тривиально:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t}\tilde{K}(\lambda)d\lambda, \quad (10)$$

где t - момент времени, в который величина капитала равна $K(t)$.

Явное выражение для точного аналитического решения задачи при $D \neq e^{-1}$ имеет вид:

$$K(t) = K_0(t) + \Theta(t-\theta) \times \left\{ \frac{Z}{k}\left[1 - \sum_{i=1}^{2} \frac{e^{p_i t/\theta}}{1+p_i}\right] + \frac{\kappa}{k}\sum_{i=1}^{2} \frac{e^{p_i t/\theta}}{1+p_i}\left(1+\frac{D}{p_i}\right)\right\}. \quad (11)$$

Таким образом, в рамках простейшей модели удается описать влияние эффектов запаздывания в задаче о среднесрочных инвестициях, оценить величину первоначальных инвестиций, увеличение основного капитала за счет роста цен и скорость выбытия основных фондов за счет износа.

Следующее, более точное приближение, логично назвать приближением “жадного хозяина” ($\alpha = 0$). С экономической точки зрения это приближение оправдано, если на ранних этапах реализации инвестиционного проекта основная часть финансируется за счет привлеченных средств. В этом случае решение системы уравнений (1) находится в приближении декомпозиции. При этом уравнение (2) имеет вид:

$$\frac{dK(t+\vartheta)}{dt} = -kK(t) + B_{ext}(t). \qquad (12)$$

Его решение в лапласовских изображениях дается формулой (13):

$$\tilde{K}(\lambda) = \frac{\lambda e^{\lambda\vartheta}\tilde{K}_0(\lambda) + \tilde{B}_{ext}(\lambda) + K(\vartheta)}{\lambda e^{\lambda\vartheta} + k}. \qquad (13)$$

Представим выражение (13) в виде:

$$\tilde{K}(\lambda) = \tilde{K}_0(\lambda) + \frac{K(\vartheta) - k\tilde{K}_0(\lambda)}{\lambda e^{\lambda\vartheta} + k} + \frac{\tilde{B}_{ext}(\lambda)}{\lambda e^{\lambda\vartheta} + k}. \qquad (14)$$

По теореме о конволюции имеем:

$$K(t) = K_0(t) + \Theta(t-\vartheta)\times \qquad (15)$$

$$\times\left\{K(\vartheta)R(t) + \int_0^t R(\xi)\left[B_{ext}(t-\xi) - kK_0(t-\xi)\right]d\xi\right\},$$

где $R(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda e^{\lambda\vartheta}+k}d\lambda =$

$$=\Theta(t-\vartheta)\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{\lambda_j t}}{e^{\lambda_j\vartheta}\left(1+\lambda_j\vartheta\right)} \equiv \Theta(t-\vartheta)R_r(t), \qquad (16)$$

здесь $R_r(t)$ - аналитическая функция, причем λ_1, λ_2 - корни уравнения (6).

Выражение (16) справедливо в том случае, когда $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$.

Соотношение (16) позволяет существенно упростить формулу (15). В самом деле:

$$K(t) = K_0(t) + \Theta(t-\vartheta)\times \qquad (17)$$

$$\times\left\{K(\vartheta)R_r(t) + \int_0^{t-\vartheta} R_r(t-\xi)\left[B_{ext}(\xi) - kK_0(\xi)\right]d\xi\right\}.$$

В рамках используемого подхода логично считать, что экономическая отдача от внешних инвестиций (т.е. $B_{ext}(t)$) на отрезке времени $t\in[0,\vartheta]$ определяется средним темпом капиталовложений:

$$\frac{K(t+\vartheta) - K(t)}{\vartheta} \approx B_{ext}(t). \qquad (18)$$

В этом приближении первое уравнение системы (1) на промежутке времени $t\in[0,\vartheta]$ приобретает вид:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mu\cdot\left(B_{ext}(t) + A(t) - (1-c)Y(t)\right). \qquad (19)$$

Решение уравнения (19) находится методом вариации произвольной постоянной. При условии полного отсутствия внешних инвестиций $B_{ext}(t)$ и постоянных издержек $A(t)$ уравнение (19) принимает вид:

$$\frac{dY_0(t)}{dt} = -\mu\cdot(1-c)Y_0(t).$$

Решение этого уравнения очевидно:

$$Y_0(t) = C\cdot\exp\left(-\mu(1-c)t\right).$$

Для того чтобы решить неоднородное линейное дифференциальное уравнение (19), необходимо объявить постоянную интегрирования C в решении однородного уравнения на Y_0 функцией времени:

$$C = C(t).$$

Подставляя в уравнение (19) его формальное решение, в виде

$$Y(t) = C(t)\cdot\exp\left(-\mu(1-c)t\right),$$

мы приходим к уравнению, определяющему зависимость функции $C = C(t)$ от времени:

$$\frac{dC(t)}{dt}\cdot\exp\left(-\mu(1-c)t\right) =$$

$$= \mu\cdot\left(B_{ext}(t) + A(t)\right),$$

откуда с учетом начальных условий следует, что

$$C(t) = \mu\int_0^t\left(B_{ext}(\xi) + A(\xi)\right)\times$$

$$\times\exp\left(\mu(1-c)\xi\right)d\xi + Y(0).$$

Подставляя это соотношение в формальное решение уравнения (19), мы приходим к окончательному выражению для $Y(t)$:

$$Y(t) = \left[\mu\int_0^t\left(B_{ext}(\xi) + A(\xi)\right)\cdot\exp\left(\mu(1-c)\xi\right)d\xi + Y(0)\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\mu(1-c)t\right). \qquad (20)$$

Предположим, что внешние инвестиции прекращаются в момент $t = \vartheta$. В рамках решаемой задачи это допущение оправдано, и не снижает степени общности результатов анализа. Для простоты предположим, что

$$\left(B_{ext}(\xi)+A(\xi)\right)=C_0\approx const. \qquad (21)$$

Тогда

$$Y(t)=\left[\mu\int_0^t C_0\cdot\exp\left(\mu(1-c)\xi\right)d\xi+Y(0)\right]\cdot\exp\left(-\mu(1-c)t\right)=$$

$$=\left[\frac{C_0\left(\exp\left(\mu(1-c)t\right)-1\right)}{1-c}+Y(0)\right]\cdot\exp\left(-\mu(1-c)t\right) \qquad (22)$$

и на момент окончания внешних “вливаний” отдача от вложений будет равна:

$$Y(t)=C_0\cdot(1-c)^{-1}\cdot\left(1-\exp\left(-\mu(1-c)\vartheta\right)\right). \qquad (23)$$

Рассчитаем величину $K(t)$ в приближении $B_{ext}=\Theta(\vartheta-t)B_0$; $B_0=const$. Будем считать, что $K_0(t)=\Theta(\vartheta-t)\cdot B_0\cdot t$. Тогда

$$K(t)=B_0\Big\{\Theta(\vartheta-t)t+\Theta(t-\vartheta)\times$$

$$\times\left[\vartheta R_r(t)+\int_0^{t-\vartheta}R_r(t-\xi)\left(1-k\xi\right)d\xi\right]\Big\}. \qquad (24)$$

При временах $t>\vartheta$ выражение (24) имеет чрезвычайно простую структуру:

$$K(t)=B_0\left[\vartheta R_r(t)+\int_0^{t-\vartheta}R_r(t-\xi)\left(1-k\xi\right)d\xi\right], \qquad (25)$$

где согласно (16):

$$R_r(t)=\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{\lambda_j t}}{e^{\lambda_j\vartheta}\left(1+\lambda_j\vartheta\right)}=\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{\lambda_j(t-\vartheta)}}{1+\lambda_j\vartheta}. \qquad (26)$$

Перепишем (25) в виде:

$$K(t)=B_0\left[\vartheta R_r(t)+\int_\vartheta^t R_r(\xi)\left(1-kt+k\xi\right)d\xi\right]. \qquad (27)$$

Совершенно очевидно, что

$$K(t+\vartheta)=B_0\Bigg[\vartheta\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{\lambda_j t}}{1+\lambda_j\vartheta}+\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{1+\lambda_j\vartheta}\times$$

$$\times\left(1-k\left(t+\frac{1}{\lambda_j}\right)\right)\left(\frac{e^{\lambda_j t}-1}{\lambda_j}\right)+\sum_{j=1}^{2}\frac{kt}{1+\lambda_j\vartheta}\frac{e^{\lambda_j t}}{\lambda_j}\Bigg]. \qquad (28)$$

Обозначим через $I_{eff}(t)$ эффективную величину инвестиционных потоков:

$$I_{eff}(t)=\frac{K(t+\vartheta)-K(t)}{\vartheta}. \qquad (29)$$

Тогда для времен $t>\vartheta$ эта величина определяется соотношениями (27), (28).

В соответствии с этим первое уравнение системы (1) для времен $t>\vartheta$ перепишется в виде:

$$\frac{dY(t)}{dt}=\mu\cdot\left(I_{eff}(t)+A(t)-(1-c)Y(t)\right). \qquad (30)$$

Решение уравнения (30) имеет вид:

$$Y(t)=\left[\mu\int_\vartheta^t\left(I_{eff}(\xi)+A(\xi)\right)\cdot\exp\left(\mu(1-c)\xi\right)d\xi+Y(\vartheta)\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\mu(1-c)t\right). \qquad (31)$$

Соотношения (24)-(29), (31) дают решение задачи оценки динамики финансовых потоков и капитала в рамках модели Гудвина - Калецкого.

---

[1] Детали см.: *Goodwin R.M.* The non-linear accelerator and the Persistence of Business Cycles // Econometrica. 1951. № 19. P. 1-17; *Kalecki M.* Theory of Economic Dynamics. Allen and Unwin, 1954; *Аллен Р.* Математическая экономия. М., 1963; *Швидак А.И.* Качественные методы анализа нестабильной экономики. Самара, 2000; *Салов А.В.* Оценка экономической эффективности долгосрочных инвестиций // Естествознание. Экономика. Управление. Вып. 2. Самара, 2001. С. 193-202.

[2] См.: *Goodwin R.M.* Op. cit; *Kalecki M.* Op. cit.; *Аллен Р.* Указ. соч.

[3] *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., 1975.

Поступила в редакцию 22.10.2010 г.