УДК 332.012.2

О МОДЕЛИРОВАНИИ КОНФЛИКТА МАТРИЧНОЙ ИГРОЙ И ПРИМЕНЕНИИ СВОЙСТВ ЕЕ РЕШЕНИЙ К ПРИКЛАДНЫМ ЗАДАЧАМ ЭКОНОМИКИ И ВОЕННОГО ДЕЛА

© 2009 А.И. Чегодаев*

Ключевые слова: антагонистическая игра, множество чистых стратегий, матричная игра, функция выигрыша, теория конфликта интересов, понятие полезности, симплекс-метод, оптимальный план, базисные неизвестные.

Изучаются условия, при которых реальный конфликт может моделироваться конечной антагонистической игрой. Рассматривается задача об антагонистической конкуренции, на примере которой иллюстрируется моделирование конфликта между двумя фирмами матричной игрой и осуществляется нахождение оптимальных смешанных стратегий этой игры с помощью методов линейного программирования, теории вероятностей, свойств решений матричной игры, полученных автором статьи и позволяющих упрощать матричную игру. Показаны различные приложения теории матричных игр к прикладным задачам экономики и военного дела.

При решении прикладных задач средствами теории матричных игр необходимо учитывать, что реальный конфликт может моделироваться конечной антагонистической игрой, если он удовлетворяет следующим условиям: 1) конфликт определяется антагонистическим взаимодействием двух сторон, каждая из которых располагает лишь конечным числом возможных действий; 2) свои действия стороны предпринимают независимо друг от друга, т.е. каждая из них не имеет информации о действии, совершаемом другой стороной; результат этих действий оценивается вещественным числом, которое определяет полезность сложившейся ситуации для одной из сторон, при этом полезность такой ситуации для другой стороны равна этому числу, взятому с отрицательным знаком; 3) каждая из конфликтующих сторон оценивает как для себя, так и для противника полезность любой возможной ситуации, которая может сложиться в результате их взаимодействия; 4) действия конфликтующих сторон в силу своей природы являются нерасчлененными и однократными, т.е. структура каждого из них не имеет каких-либо формальных отличительных свойств, это позволяет интерпретировать действия сторон как элементы некоторых абстрактных множеств, отличая различные действия друг от друга лишь по степени полезности сложившейся ситуации[1].

Если конфликт удовлетворяет четырем перечисленным условиям, то, назвав одну из сторон 1-м игроком, а другую - 2-м игроком, можно этот конфликт описать конечной антагонистической игрой $Г = <X, Y, H>$, где X - множество чистых стратегий 1-го игрока, Y - множество чистых стратегий 2-го игрока, H - функция выигрыша (полезности) 1-го игрока, определенная на всех упорядоченных парах (x,y) возможных чистых стратегий игроков $(x \in X,\ y \in Y)$. Условия 1-4 дают возможность представить конфликт в виде игры. Конечную антагонистическую игру $Г = <X, Y, H(x, y)>$ можно задать в виде матрицы $H_{m\times n} = \left(h_{ij}\right)$, где m - число чистых стратегий 1-го игрока $\left(i = 1,2,\ldots, m\right)$, n - число чистых стратегий 2-го игрока $\left(j = 1,2,\ldots, n\right)$, $h_{ij} = H(i, j)$ - выигрыш 1-го игрока в ситуации (i, j). Матрица $H_{m\times n} = \left(h_{ij}\right)$ является, по существу, теоретико-игровой моделью (матричной игрой) реальных конфликтов, которые удовлетворяют условиям 1-4. Ее построение и последующий теоретико-игровой анализ, завершающийся нахождением оптимальных стратегий, составляют приложения теории конечных антагонистических игр в экономике, в военном деле, спорте, биологии и т.д.

Заметим, что реальные конфликты не всегда удовлетворяют этим четырем услови-

* Чегодаев Анатолий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Ярославского высшего зенитного ракетного училища противовоздушной обороны (военного института). E-mail: vestnik@sseu.ru.

ям. Например, число возможных действий игроков может быть бесконечным, либо необозримым, невозможным для перечисления, а все возможные ситуации трудно предусмотреть заранее. Независимость действий игроков в реальной жизни трудно обеспечить, так как информация об их действиях становится известной тому или другому игроку. Что касается полезности результата действий игроков, то она бывает известна не совсем точно. Однако практически реальные конфликты моделируют чисто матричными играми, если количество действий игроков конечно, их интересы противоположны, а функция выигрыша найдена почти верно. Если решение составленной модели реальной задачи дает возможность выдать конкретное руководство к оптимальному действию игроков и установить среднюю полезность ситуаций, целесообразность, разумность которых подтверждается практикой, то естественно считать, что модель задачи достаточно точно отразила существенные черты исследуемого явления, процесса. Теоретико-игровая модель явления, полезная для практики, обычно может быть составлена высококвалифицированным математиком в содружестве со специалистом той области, в которой используется эта модель, так как главные действия, определяющие конфликт и оценки полезностей возможных ситуаций легче выделить такому специалисту.

Своей книгой "Теория игр и экономическое поведение" (Принстон, 1944 г.) математик Джон фон Нейман и экономист Оскар Моргенштерн в значительной степени заложили основы математической теории "конфликта интересов". Исходя из предположения о том, что человеческие действия в экономической сфере - это целенаправленные действия, они начали с введения понятия "полезность", необходимого для измерения результатов действий. Это понятие введено ими достаточно точно и строго. Оказалось, что введенный Д. Нейманом и О. Моргенштерном набор аксиом единственным образом определяет привычное в обыденной жизни слово "полезность".

Рассмотрим задачу об антагонистической конкуренции, на которой проиллюстрируем моделирование некоторого конфликта и осуществим нахождение оптимальных смешанных стратегий с помощью методов линейного программирования, свойств решений матричной игры, полученных автором статьи и позволяющих упрощать матричную игру.

Задача
(об антагонистической конкуренции)

Фирма *A* в условиях капиталистической экономики производит некоторый сезонный товар (например, женские сапоги), который имеет спрос в течение n единиц времени, например, *6 месяцев*, и поступает на рынок в момент $i(i = 1,2,3,4,5,6)$. Вторая фирма *B*, выпускает тот же товар и, имея цель разорить фирму *A*, готовит свое производство к выпуску и продаже товара в выбранный период времени. Предполагается, что качество конкурирующих товаров зависит от времени их поступления на рынок относительно друг друга - чем позже товар выбрасывается на рынок, тем качество его выше, а реализуется только товар более высокого качества, причем доход от продажи товара в единицу времени составляет k долларов.

Требуется рассчитать математическое ожидание дохода фирмы *A*, таким образом, чтобы доход фирмы *A* максимизировать за счет удачного выброса товара в необходимые единицы времени, преследуя цель - минимизировать доходы фирмы *B*.

Решение. Очевидно, что фирмы *A, B,* имея противоположные цели, находятся в ситуации конфликта. Построим теоретико-игровую модель этого конфликта, считая, что 1-й игрок (фирма *A*) и 2-й игрок (фирма *B*) имеют одинаковое число чистых стратегий, т.е. множества стратегий совпадают $X = Y = \{1,2,3,\dots,n\}$. Составим функцию выигрыша $H(i,j)$ для 1-го игрока. Допустим, что фирма *A* выбросит свой товар в момент времени i, а фирма *B* - в момент времени j, причем $j > i$. Тогда фирма *A*, не имея конкурента в течение единиц времени, получит за это время доход долларов. Если в момент времени j фирма *B* выбрасывает товар более высокого качества, чем товар фирмы *A*, то с момента времени j фирма *A* теряет рынок и в дальнейшем дохода не получает. Однако, если фирма *A*, уловив нужный момент $i > j$ выбрасывает на рынок более качественный товар, то она будет получать доход в течение оставшихся единиц времени. Этот доход фирмы будет равен $k(n - i + 1)$ долларов.

Итак, функция выигрыша 1-го игрока задается следующим образом:

$$H(i,j)=\begin{cases} k(j-i), & \text{если} \quad i<j; \\ \frac{1}{2}k(n-i+1), & \text{если} \quad i=j; \\ k(n-i+1), & \text{если} \quad i>j. \end{cases}$$

Запишем матрицу H полученной конечной антагонистической игры для общего случая:

$$H_{n\times n}=\begin{pmatrix} \frac{kn}{2} & 1k & 2k & \dots & \dots & k(n-2) & k(n-1) \\ k(n-1) & \frac{k(n-1)}{2} & 1k & \dots & \dots & k(n-3) & k(n-2) \\ k(n-2) & k(n-2) & \frac{k(n-2)}{2} & \dots & \dots & k(n-4) & k(n-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2k & 2k & 2k & \dots & \dots & 1k & 1k \\ 1k & 1k & 1k & \dots & \dots & 1k & \frac{1}{2}k \end{pmatrix}.$$

Мы не будем решать данную игру в общем виде, а ограничимся решением такой матричной игры для случая, когда $n=6$.

Матрица H будет иметь вид

$$H_{6\times 6}=\begin{pmatrix} 3k & 1k & 2k & 3k & 4k & 5k \\ 5k & \frac{5}{2}k & 1k & 2k & 3k & 4k \\ 4k & 4k & 2k & 1k & 2k & 3k \\ 3k & 3k & 3k & \frac{3}{2}k & 1k & 2k \\ 2k & 2k & 2k & 2k & 1k & 1k \\ 1k & 1k & 1k & 1k & 1k & \frac{1}{2}k \end{pmatrix}.$$

Проследим, как, например, заполняется 4-я строка матрицы $H_{6\times 6}$, т.е. как получаются ее эл+ементы $h_{41}, h_{42}, h_{43}, h_{44}, h_{45}, h_{46}$. Для этого последовательно обращаемся к функции выигрыша $H(i,j)$, учитывая три случая $(i<j, i=j, i>j)$: $h_{41}=k(6-4+1)=3k$, $h_{42}=k(6-4+1)=3k$, $h_{43}=k(6-4+1)=3k$, $h_{44}=k\frac{1}{2}(6-4+1)=k\frac{3}{2}$, $h_{45}=k(5-4)=k1$, $h_{46}=k(6-4)=2k$. Если все элементы матрицы $H_{6\times 6}$ разделить на число $k\neq 0$, то получим матрицу

$$H^1_{6\times 6}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & \frac{5}{2} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

которая задает игру, оптимальные смешанные стратегии которой совпадают с оптимальными стратегиями игры с матрицей $H_{6\times 6}$, но значение игры с матрицей $H^1_{6\times 6}$ уменьшается в k раз по сравнению с ценой игры с матрицей $H_{6\times 6}$. Теперь последовательно будем упрощать матричную игру с матрицей $H^1_{6\times 6}$. Пусть $x^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*)$ - оптимальная смешанная стратегия 1-го игрока, а $y^*=(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*)$ - оптимальная смешанная стратегия 2-го игрока, $v^*_{H^1_{6\times 6}}=H(x^*, y^*)$ - цена игры с матрицей $H^1_{6\times 6}$. Как видно, элементы 6-й строки матрицы $H^1_{6\times 6}$ меньше соответствующих элементов 5-й строки, поэтому 5-я стратегия 1-го игрока доминирует 6-ю стратегию, элементы 1-го столбца матрицы $H^1_{6\times 6}$ не меньше соответствующих элементов 2-го столбца, поэтому 2-я стратегия 2-го игрока доминирует 1-ю стратегию. После вычеркивания 1-го столбца и 6-й строки получим матрицу

$$H_{5\times5}^{2}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ \frac{5}{2}&1&2&3&4\\ 4&2&1&2&3\\ 3&3&\frac{3}{2}&1&2\\ 2&2&2&1&1\end{pmatrix}.$$

Так как выпуклая линейная комбинация 1-й и 3-й векторов-строк с коэффициентами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ превосходит 2-ю вектор-строку, то 2-я строка может быть отброшена. Кроме того, элементы 5-го столбца не меньше соответствующих элементов 4-го столбца, поэтому можно удалить 5-й столбец. В результате получим матрицу

$$H_{4\times4}^{3}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 4&2&1&2\\ 3&3&\frac{3}{2}&1\\ 2&2&2&1\end{pmatrix}.$$

Четвертая строка матрицы $H_{4\times4}^{3}$ может быть удалена, так как выпуклая линейная комбинация 1-й, 2-й и 3-й вектор-строк с коэффициентами $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ превосходит 4-ю вектор-строку. Анализируя матрицы $H_{6\times6}^{1}$ и $H_{4\times4}^{3}$ и используя свойства решений соответствующих игр, заключаем, что у оптимальной смешанной стратегии $x^{*}=\left(x_1^{*},x_2^{*},x_3^{*},x_4^{*},x_5^{*},x_6^{*}\right)$ 1-го игрока 2-я, 5-я и 6-я координаты равны нулю: $x_2^{*}=x_5^{*}=x_6^{*}=0$. Чтобы найти остальные координаты, найдем оптимальную смешанную стратегию 1-го игрока с матрицей $H_{3\times4}^{4}$, полученной из матрицы $H_{4\times4}^{3}$ путем вычеркивания 4-й строки:

$$H_{3\times4}^{4}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 4&2&1&2\\ 3&3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что игра с матрицей $H_{3\times4}^{4}$ не имеет решений в чистых стратегиях, так как нижняя цена игры не равна верхней цене игры.

Сведем игру с матрицей $H_{3\times4}^{4}$ к задаче линейного программирования. Координаты оптимальной стратегии 1-го игрока $\tilde{x}^{*}=\left(x_1^{*},x_3^{*},x_4^{*}\right)$ удовлетворяют следующим ограничениям:

$$x_1^{*}+4x_3^{*}+3x_4^{*}\ge v,$$

$$2x_1^{*}+2x_3^{*}+3x_4^{*}\ge v,$$

$$3x_1^{*}+x_3^{*}+\frac{3}{2}x_4^{*}\ge v,$$

$$4x_1^{*}+2x_3^{*}+x_4^{*}\ge v,$$

$$x_1^{*}\ge0,\ \ x_3^{*}\ge0,\ \ x_4^{*}\ge0,$$

$$x_1^{*}+x_3^{*}+x_4^{*}=1,$$

где v - цена игры, причем , так как все элементы матрицы $H_{3\times4}^{4}$ неотрицательны. Разделив все члены ограничений на число v, вводя обозначение , $i=1,3,4$, получим следующую задачу линейного программирования:

$$z=t_1+t_2+t_3=\frac{1}{v}\to\min$$

$$\begin{cases}t_1+4t_2+3t_3\ge1,\\ 2t_1+2t_2+3t_3\ge1,\\ 3t_1+t_2+\frac{3}{2}t_3\ge1,\\ 4t_1+2t_2+t_3\ge1,\end{cases}\qquad(1)$$

$$t_1\ge0,\ \ t_2\ge0,\ \ t_3\ge0.$$

Решим задачу (1) симплекс-методом. Для этого задачу приведем к канонической форме:

$$z=t_1+t_2+t_3\to\min$$

$$t_1+4t_2+3t_3-t_4=1,\qquad(2)$$

$$2t_1+2t_2+3t_3-t_5=1,$$

$$3t_1+t_2+\frac{3}{2}t_3-t_6=1,$$

$$4t_1 + 2t_2 + t_3 - t_7 = 1,$$

$$t_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5,6.$$

Применяя симплексные преобразования к системе линейных уравнений (2), приведем систему к базисному виду. В результате получим:

$$t_2 - \frac{1}{2}t_4 + \frac{5}{8}t_5 - \frac{1}{4}t_6 = \frac{1}{8},$$

$$t_3 + \frac{1}{3}t_4 - \frac{11}{12}t_5 + \frac{1}{2}t_6 = \frac{1}{12},$$

$$-\frac{2}{3}t_4 + \frac{4}{3}t_5 - 2t_6 + t_7 = \frac{1}{3},$$

$$t_1 + \frac{1}{4}t_5 - \frac{1}{2}t_6 = \frac{1}{4}.$$

Выражая базисные неизвестные t_1, t_2, t_3 через свободные неизвестные t_4, t_5, t_6 и подставляя полученные выражения в целевую линейную функцию $z = t_1 + t_2 + t_3$, получим эту функцию в форме $z = \frac{11}{24} + \frac{1}{6}t_4 + \frac{1}{24}t_5 + \frac{1}{4}t_6$.

$\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}$

Далее составим симплекс-таблицу для нахождения оптимальных планов задачи (2):

функции на этом плане равно $\frac{11}{24}$. Учитывая, что $z = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{v}$, а $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{1}{8}$, $t_3 = \frac{1}{12}$, получим $v = \frac{24}{11}$. Теперь, зная, что $t_i = \frac{x_i^*}{v}$, найдем $x_1^* = t_1 \times v = \frac{6}{11}$, $x_3^* = t_2 \times v = \frac{3}{11}$, $x_4^* = t_3 \times v = \frac{2}{11}$. Итак, оптимальная смешанная стратегия $\tilde{x}^*$ первого игрока в игре с матрицей $H_{3\times 4}^4$ найдена: $\tilde{x}^* = \left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right)$. Следовательно, $x^* = \left(\frac{6}{11}, 0, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}, 0, 0\right)$ - оптимальная смешанная стратегия первого игрока (фирмы A) исходной матричной игры, а доход фирмы от продажи сезонного товара составит $vk = \frac{24}{11}k$ долларов.

Базисные переменные	Свободные члены	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_1	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
t_2	$\frac{1}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0
t_3	$\frac{1}{12}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{12}$	$\frac{1}{2}$	0
t_7	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-2	1
z	$\frac{11}{24}$	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{4}$	0

Анализируя симплекс-таблицу и применяя признак оптимальности опорного плана, заключаем, что найденный опорный план $T = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, 0,0,0, \frac{1}{3}\right)$ является единственным оптимальным планом задачи линейного программирования (2), а значение целевой

Осталось сделать рекомендации фирме A. Для того, чтобы фирма A не была разорена фирмой B, ей необходимо поставлять сезонный товар на рынок в 1-ю, 3-ю и 4-ю единицу времени соответственно с вероятностями, равными .

Заметим, что нахождение оптимальной смешанной стратегии второй фирмы можно осуществить аналогичным образом.

Автором статьи показаны различные приложения теории матричных игр и свойств их решений к прикладным задачам экономики и военного дела, в частности: 1) к задаче о планировании выпуска побочной продукции; 2) к задаче о планировании наступательного боя; 3) к задаче о планировании посева; 4) к задаче о поражении военного объекта; 5) к задаче об анализе экономической эффективности инвестиций [3,4].

[1] См.: *Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. М., 1981; *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М., 1985; *Чегодаев А.И.* Основы теории конечных антагонистических игр и их применение к решению задач экономики и военного дела: Учеб. пособие. Ярославль, 1993; *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., 1970; *Чегодаев А.И.* Математические методы и модели поддержки принятия решений в условиях неопределенностей: Монография. Ярославль, 2007; *Бердников В.А., Реснянский М.М., Севостьянов А.В.* Разработка гибких стратегий как резерв и новый аспект конкурентоспособности предприятий малого и среднего бизнеса // Вестн. Самар. гос. ун-та. Самара, 2008. № 6 (44).

Поступила в редакцию 26.06.2009 г.