УДК 338.26.015:51

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОЦЕНОК ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ В ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

© 2009 В.А. Прокофьев*

Ключевые слова: темп роста, моментный темп прироста, коэффициент эластичности, регрессионная модель, частный коэффициент детерминации.

Предложена методика адекватной оценки моментного и интервального темпов роста явления, представлен эконометрический подход в исследовании влияния факторов на динамику результативной величины.

Темпы роста - важнейшие статистические показатели, характеризующие интенсивность развития явления во времени. Традиционно они рассчитываются как отношение его размеров за равные или через равные (как правило, календарные) интервалы времени (далее будем называть их "интервальными"). При этом не изучается интенсивность развития явления и не исследуется влияние на нее факторов внутри соответствующих промежутков времени. Отсутствие методов непрерывной оценки интенсивности изменения явлений в теории и практике эконометрического моделирования порождает проблематичность контроля и регулирования интенсивности развития социально-экономических процессов и, соответственно, "вольность" трактовки такой оценки и "приближенность" ее расчета с неизвестной погрешностью.

Общепринято в учебной и научной литературе характеризовать интенсивность развития явления в точке отношением производной функции к ее величине $\left(\frac{y'}{y}\right)$ называя его как заблагорассудится (как кому понравится) либо темпом роста, либо темпом прироста[1].

Однако, можно привести примеры бесчисленного множества функций, для которых $\frac{y'}{y}\langle -1$ (-100%) на некотором интервале или во всей области определения функции. К ним относятся функции вида: $y = c \cdot e^{-rx}$, где x-аргумент, c, r - постоянные неравные нулю величины и r >1; $y = c \cdot x^{-r}$ при $0<x<r$.

Например, для функции $y = e^{-7x}$ в каждой точке области ее определения $\frac{y'}{y} = -7$ (-700%), что не соответствует ни одному из двух понятий: темпу роста или темпу прироста.

На наш взгляд, название "темп роста" совершенно не подходит показателю $\frac{y'}{y}$ хотя применительно к индексу цен его называют "темпом инфляции", так как его величина отрицательна для любой убывающей положительной на некотором интервале функции, а темпы роста любых явлений, как известно, величины неотрицательные. Ясно и то, что темп роста явления, уровни которого возрастают, больше 1 (100%). Однако, величина $\frac{y'}{y}$ для большого числа возрастающих функций меньше 1, например, для степенной функции ($y = x^n$),

для $n = 1$ $y = x$, $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$ откуда следует, что

при $x > 1$;

для $n = 2$ $y = x^2$, $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$ и $\frac{y'}{y} < 1$ при x > 2 и т.д.,

что противоречит известному в эконометрическом анализе представлению темпа роста.

Покажем, что $\frac{y'}{y}$ не отвечает и названию "темп прироста" не только для отдель-

* Прокофьев Владимир Анатольевич, доктор экономических наук, профессор, зав. кафедрой статистики Саратовского государственного социально-экономического университета.

ных видов функций, но и с позиции его математической конструкции и экономического смысла. Если бы были основания считать данное выражение темпом прироста, то показатель $\frac{y'}{y}+1$ получил бы название "темп роста функции в точке" не вступая в противоречие с понятиями "интервального" и "среднего" темпами роста, а являясь пределом среднего темпа роста при стремлении интервала времени к нулю, аналогично тому, как мгновенная скорость функции в точке представляет собой предел средней скорости ее роста.

Представим, что интервальные темпы роста значений некоторой функции, вычисленные за все единицы времени исследуемого периода, оказались равными между собой. Тогда они должны быть равны значениям моментных темпов роста функции во всех точках области ее определения. Очевидно, такое свойство темпов роста будет выполнятся для показательных функций вида $y = c \cdot a^x$, где c - постоянный множитель; a - основание степени. Например, если x измеряется в месяцах, то a - постоянный темп роста показательной функции за любой месяц исследуемого периода.

Таким образом, величина моментного темпа роста данной функции в каждой точке x должна равняться a. Согласно же общепринятому методу расчета моментный темп роста показательной функции в любой точке области ее определения будет равен $\ln a + 1$:

$$\frac{y'}{y}+1=\frac{c\cdot a^x\cdot\ln a}{c\cdot a^x}+1=\ln a+1,$$

что противоречит действительности.

Убедимся в отсутствии исходных предпосылок возможного выбора показателя $\frac{y'}{y}$ в качестве моментного темпа прироста функции.

Очевидно,

$$\frac{y'}{y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)\cdot\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}-1\right),$$

где $\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}$ - темп роста функции $y=f(x)$ за интервал Δx, - темп прироста функции за интервал Δx, - отношение базисного темпа прироста функции за интервал Δx к продолжительности этого интервала.

Но, как доказывается в любом учебнике по теории статистики, средний темп прироста не может быть определен таким способом, а рассчитывается как разность средней геометрической цепных темпов роста и единицы.

Окончательным подтверждением несоответствия показателя его назначению с позиции социально-экономической интерпретации может послужить следующий пример. Предположим, что удельный вес семей имеющих более двух детей в области на 1 января - конец каждого из четырех пятилетий составил (%):

1993 г. - 40,0; 1998 г. - 10,0; 2003 г. - 4,4; 2008 г. - 2,5.

Легко убедиться, что данные величины являются значениями функции $y=\frac{10}{x^2}$, где аргумент x измеряется в десятилетиях, а условным началом отсчета является 1 января 1988 г. Тогда

x	0,5	1,0	1,5	2,0
y	40,0	10,0	4,4	2,5
$\frac{y'}{y}$	-4,0	-2,0	-1,3	-1,0

Как видно, величина показателя $\frac{y'}{y}$ в любой точке интервала $0 < x < 2$ меньше -1 (-100%), что не соответствует его представлению в качестве темпа прироста исследуемого явления, которое не может снизится более, чем на 100%.

Выясним в условиях данного примера причину ошибки при истолковании показателя $\frac{y'}{y}$ как моментного темпа прироста. Рассмотрим значения показателя $\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}-1\right)$ за промежутки уменьшающейся продолжительности $[x,\ x+\Delta x]$, где $x=1$, а изменяется от 1 до 0.

Полагая , получим интервальный темп прироста анализируемого явления за 10 лет: $\frac{1}{1}\left(\frac{2{,}5}{10{,}0}-1\right)=-0{,}75$; при $\Delta x=\frac{1}{2}$ получим $\frac{1}{1/2}\left(\frac{4{,}4}{10{,}0}-1\right)=2(0{,}44-1)=2(-0{,}56)=$ $=-0{,}56-0{,}56=-1{,}12$; где 0,44 - интервальный темп роста явления за 5 лет; -0,56 - интервальный темп прироста за 5 лет, а -1,12 - его удвоенная величина в пересчете на 10 лет, уже не имеющая смысла в силу неправомерного удвоения (суммирования) пятилетних темпов прироста с целью получения темпа прироста за 10 лет.

Очевидно, величина показателя $\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}-1\right)$ будет приближаться к значению $\frac{y'}{y}$ в точке $x=1$ по мере дальнейшего сокращения длины интервала, за который он исчисляется. Так, при $\Delta x=\frac{1}{10}$ будем иметь

$$\frac{1}{1/10}\left(\frac{10}{1{,}1^2}\Big/\frac{10}{1}-1\right)=10(0{,}83-1)=$$
$$=10(-0{,}17)=-1{,}70;$$

где -0,17 - темп прироста за 1 год, а -1,70 - сумма равных годовых темпов прироста за 10 лет;

При $\Delta x=\frac{1}{100}$ получим

$$\frac{1}{1/100}\left(\frac{10}{1{,}01^2\cdot 10}-1\right)=100(0{,}9803-1)=$$
$$=100(-0{,}0197)=-1{,}97,$$

где -0,0197 - темп прироста за десятую часть года, вычисленный с точностью до десятитысячных долей единицы, а -1,97 - сумма ста всех таких показателей приближенная к точному значению показателя $\frac{y'}{y}$ в точке $x=1$.

Поскольку действительная величина темпа прироста функции как на интервале $[1,\ 1+\Delta x]$, так и в точке $x=1$ находится в пределах [-1,0], то, как видно из примера, с уменьшением длины интервала Δx величина показателя не приближается к действительной величине темпа прироста в точке $x=1$, а, наоборот, все больше отличается от нее. Причиной этого является повторное суммирование темпа прироста, определенного за бесконечно малый отрезок времени, с целью характеристики интенсивности развития явления за промежуток времени заданной продолжительности.

Для того чтобы определить действительную величину темпа роста и темпа прироста функции в точке $x=1$, будем рассуждать следующим образом. Поскольку интенсивность развития анализируемого явления за интервал $[1,\ 1+\Delta x]$, продолжительность которого составляет 5 лет, характеризуется темпом роста равным, как видели, 0,44, то для пересчета на 10 лет его величину нужно вычислять не путем удваивания темпа прироста, а умножать саму на себя в соответствии с известной в статистике взаимосвязью цепных и базисных темпов роста - произведение цепных темпов роста равно базисному: $0{,}44^2=0{,}19$. Тогда темп прироста в пересчете на 10 лет составит 0,19-1=-0,81, а не -1,12. Аналогично темп роста за год (0,83) в пересчете на 10 лет составит $0{,}83^{10}=0{,}16$ и темп прироста за 10 лет будет равен 0,16-1=-0,84, а не -1,7. В общем случае для характеристики интенсивности изменения функции за промежуток в расчете на единицу измерения аргумента надо вычислить величину

(1)

Выражение (1) представляет собой формулу расчета средних темпов роста функции для непрерывно изменяющегося аргумента, где Δx может быть как целой, так и дробной величиной. При этом значение функции $y=f(x)$ следует трактовать как размер явления сложившийся за астрономический период (год, квартал, месяц и др.) к моменту времени x.

Для оценки интенсивности развития явления в точке x необходимо перейти к пределу выражения (1) при , который будем называть моментным темпом роста функции $y = f(x)$ в точке x и обозначать $f^T(x)$:

$$f^T(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}. \qquad (2)$$

В зависимости о того, в каких единицах измерения выражается аргумент функции (сутках, кварталах и т.д.) мы будем получать соответственно суточный, квартальный и т.д. моментный темп роста функции. Заметим, что моментные темпы роста функции характеризуют темпы роста ее значений, взятых по абсолютной величине (без знака “минус”).

В результате ряда преобразований выражения (2) можно получить удобную для практического использования формулу расчета моментных темпов роста.

Известно, что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ откуда}$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + [f'(x) + \varepsilon(\Delta x)]\Delta x,$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Тогда

$$\Delta x \to 0 \quad Э_x(Y) = \left(f^T(x)\right): \; f'(x) = f(x) \cdot \ln f^T(x); \; f(x) = \frac{f'(x)}{\ln f^T(x)}.$$

$$= \left[\left(\frac{y(x+\Delta x)}{y(x)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} - 1 \right] \Bigg/ \left[\left(\frac{x+\Delta x}{x} \right) - 1 \right]; \quad f^T(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x) + [f'(x) + \varepsilon(\Delta x)]\Delta x}{f(x)} \right]^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}. \qquad (3)$$

Используя формулу (3), определим теперь действительную величину темпа роста и темпа прироста функции $y = \frac{10}{x^2}$ в точке $x = 1$ в условиях выше рассмотренного примера. Так как отношение $\frac{y'}{y}$ в этой точке равно (-2), то темп роста составляет: $y^T = e^{-2} = 0{,}135$ (13,5%), а темп прироста доли семей имеющих более двух детей в области на 1 января 1998 года в расчете на 10 лет составил (-86,5%).

Формула (3) устанавливает предельную связь между абсолютным приростом функции в точке x $(f'(x))$, величиной самой функции в этой точке и ее темпом роста

В экономической, статистической и математической литературе научного и учебного назначения распространены следующие два варианта расчета показателя эластичности функции $y = f(x)$:

♦ соотношение интервальных темпов прироста функции (y) и аргумента (x), вычисленных за весь интервал изменения аргумента (Δx):

$$Э_x(Y) = \left[\frac{y(x+\Delta x)}{y(x)} - 1 \right] \Bigg/ \left[\frac{x+\Delta x}{x} - 1 \right] = \frac{\Delta y}{y} \Bigg/ \frac{\Delta x}{x}; \qquad (4)$$

♦ предел правой части равенства (4) при $\Delta x \to 0$ [5, с. 547]:

$$Э_x(Y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x \cdot \frac{y'}{y}. \qquad (5)$$

Показатель эластичности функции $y = f(x)$ в соответствии с общепринятой трактовкой понятия эластичности должен отвечать на вопрос: сколько процентов прироста функции y (x) приходится в среднем на 1% прироста аргумента x, и потому должен определятся исходя из соотношения темпов прироста функции и аргумента: либо интервальных по формуле (4), либо средних, вычисленных в расчете на единицу измерения аргумента за интервал Δx в соответствии с формулой (1):

(6)

либо моментных в точке x, определенных в расчете на единицу измерения аргумента соответственно формулам (2), (3):

$$Э_x(Y) = \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{y(x+\Delta x)}{y(x)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} - 1 \right] \Bigg/ \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x+\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} - 1 \right] =$$

$$= (e^{y'/y} - 1) / (e^{1/x} - 1) = (y^T - 1) / (x^T - 1). \qquad (7)$$

По нашему мнению, вариант расчета показателя эластичности по формуле (5) не имеет достаточно ясного научного обоснования. Оценка соотношения предельных средних темпов прироста результативного и факторного признаков по формуле (7) подменяется в формуле (5) оценкой предела соотношения их интервальных темпов прироста.

Очевидно, это два совершенно разных подхода к оценке моментного коэффициента эластичности, требующих специального рассмотрения.

Нам представляется, что темп прироста экономического явления следует рассматривать как вторичный показатель скорости изменения его уровней, производный от двух первичных показателей скорости: абсолютного прироста и темпа роста. Вследствие этого темп прироста одновременно сочетает в себе и разностную (в числителе), и кратную (по отношению к знаменателю) схему сравнения последующего уровня экономического явления с одним и тем же предшествующим, а потому не может одновременно обладать свойствами аддитивности абсолютной скорости и мультипликативности относительной скорости изменения уровней явления.

Действительно, чтобы вычислить средний темп прироста, необходимо сначала рассчитать средний темп роста, затем отнять от последнего единицу, что и положено в основу формул (6), (7), либо начать с вычисления среднего абсолютного прироста, после чего полученный результат разделить на базисный уровень.

Первый вариант расчета среднего темпа прироста широко известен в теории статистики и сомнений не вызывает. Второй же вариант явно лишен экономического смысла и потому не применяется ни в научной, ни в практической сфере деятельности, поскольку рост каждого последующего уровня явления на одно и тоже число процентов предполагает переменную, а не постоянную базу сравнения. Но именно этот вариант и оказался в основе формулы (5) предельного перехода от средней абсолютной скорости изменения функции к ее производной, отношение которой к самой функции названо "темпом ее изменения"[2].

Наряду с формулами (4), (5) в статистической литературе используются и их модификации[3]:

$$Э_x = \frac{\Delta y}{\overline{y}} \Big/ \frac{\Delta x}{\overline{x}}, \tag{8}$$

$$Э_x = y' \frac{\overline{x}}{\overline{y}}, \tag{9}$$

вызывающие недоумение в толковании экономического содержания темпа прироста выражая его соотношением абсолютного прироста уровня не к предыдущему, а к средней величине двух смежных уровней в противовес здравому смыслу.

Таким образом, в качестве измерителя эластичности функции целесообразно выбирать один из первых трех предлагаемых нами вариантов показателя в зависимости от полноты располагаемой информации об экономических явлениях, оперативности расчета показателей эластичности и требуемой точности оценки, которая повышается в порядке их следования: формулы (4), (6), (7).

Во многих статистических исследованиях, связанных с индикаторами социально-экономического развития административно-территориальных образований, в настоящее время в качестве инструментария используются методы эконометрического моделирования. Одно из важных последствий их реализации предполагает сравнительный анализ силы влияния различных факторов на результативный показатель.

Зачастую для оценки степени этого влияния, при моделировании линейных уравнений множественной регрессии:

в естественной форме

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_kx_k \tag{10}$$

и в стандартизованном масштабе

$$t_y = \beta_1t_1 + \beta_2t_2 + ... + \beta_kt_k, \tag{11}$$

где $t_y = \frac{y - \overline{y}}{\sigma_y}$, $t_i = \frac{x_i - \overline{x}_i}{\sigma_i}$, $(i = \overline{1,k})$,

$$\beta_i = b_i \frac{\sigma_i}{\sigma_y}, \tag{12}$$

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_i} \tag{13}$$

равноценными в заключении представляются β - коэффициенты и средние коэффициенты эластичности[4]

(14)

или

$$Э_{yx_i} = \beta_i \frac{\upsilon_y}{\upsilon_{x_i}}, \qquad (15)$$

где υ_y , υ_{x_i} - коэффициенты вариации.

Предполагая изменение только фактора x_i на величину Δx_i от его отклонения от средней $[\Delta x_i + (x_i - \overline{x}_i)]$, мы получим изменение t_y на величину $\frac{\Delta y}{\sigma_y} = \beta_i \frac{\Delta x_i}{\sigma_i}$, откуда

$$\beta_i = \frac{\Delta y}{\sigma_y} \Big/ \frac{\Delta x_i}{\sigma_i} \qquad (16)$$

покажет, на сколько процентов по отношению к среднему квадратическому отклонению σ_y изменится отклонение $(y - \overline{y})$, если отклонение $(x_i - \overline{x}_i)$ увеличить на 1% по отношению к среднему квадратическому отклонению σ_i. Тогда β_i можно трактовать как эластичность вариации y по вариации x_i и использовать для сравнения силы влияния вариации разных факторов на вариацию результативного показателя.

В том же предположении коэффициент эластичности может быть преобразован к следующему виду:

$$Э_{yx_i} = \left(\frac{\Delta y}{\sigma_y} \Big/ \frac{\Delta x_i}{\sigma_i} \right) \frac{\upsilon_y}{\upsilon_{x_i}} = \frac{\Delta y}{\overline{y}} \Big/ \frac{\Delta x_i}{\overline{x}_i}, \qquad (17)$$

где Δx_i , Δy - величины изменения переменных и y соответствующие линейному виду регрессии.

Поэтому для всех интервалов величины Δx_i из области существования значений (x_i) показатель (17) будет иметь одно и то же значение с содержательной трактовкой: на сколько процентов изменится по отношению к своему среднему уровню результативный показатель (y), если x_i увеличится на 1% по отношению к $\overline{x}_i$.

В случае нелинейной регрессии показатель (17) будет иметь тот же смысл, но для разных интервалов одной и той же величины Δx_i из области существования значений x_i будет иметь разные значения. При этом более оправданной по сравнению с формулой (8) будет иная его конструкция:

$$Э_{yx_i} = \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x_i}{x_i}, \qquad (18)$$

где y и x_i - текущие значения результативного показателя и факторного признака, предшествующие их изменению на величины Δx_i и Δy.

Таким образом, показатели (12) и (17), связанные соотношением (15), несут в себе разное содержание, трактовку которого следует давать осторожно (корректно), обращая внимание на предупреждение М.М. Юзбашева и И.И. Елисеевой[5]: “Интерпретировать корреляционные показатели строго следует лишь в терминах вариации отклонений от средней величины. Нельзя трактовать корреляцию признаков как связь их уровней”.

Формула (15) показывает, что переход от оценки эластичности функции по определенной переменной к оценке эластичности вариации функции по вариации переменной, можно осуществить разделив $Э_{yx_i}$ на соотношение коэффициентов вариации y и x_i.

Из формулы (15) также следует возможность “противоречивых” заключений о сравнительной силе влияния факторных признаков на результативный, например, для признаков x_ℓ и x_m $(\ell \neq m)$: $Эyx_\ell > Эyx_m$, а $\beta_\ell < \beta_m$.

В действительности, такое несоответствие в неравенствах не будет означать их противоречие, а предполагает осмысленную и разную трактовку каждого из неравенств, отдавая предпочтение оценкам эластичности: (12) при характеристике устойчивости (неустойчивости) вариации y от вариации x_i; (14), (17), (18) при оценке интенсивности развития результативного показателя от интенсивности изменения фактора.

Наряду с рассмотренными коэффициентами эластичности в сравнительном анализе эконометрического моделирования применяются: частный коэффициент детерминации

$$d_{x_i} = r_{yx_i} \cdot \beta_i, \qquad (19)$$

который должен показывать на сколько процентов вариация y объясняется вариацией x_i, и Q - коэффициент

$$Q_{x_i} = Э_{yx_i} \cdot \upsilon_{x_i}, \qquad (20)$$

который пока не получил осмысленной устоявшейся (общепринятой) трактовки[6].

В условиях двухфакторной модели линейной регрессии можно показать, что

$$b_2 = \frac{\sigma^2_{x_1} \cdot \sigma_{x_2 y} - \sigma_{x_1 y} \cdot \sigma_{x_1 x_2}}{\sigma^2_{x_1} \cdot \sigma^2_{x_2} - \sigma^2_{x_1 x_2}},$$

где $\sigma_{x_i y}$ - ковариация x_i, y; $\sigma_{x_i x_j}$ - ковариация x_i, x_j ($i, j = 1,2$), $i \neq j$, откуда

если x_1 и x_2 независимы, т.е. $\sigma_{x_1 x_2} = 0$.

Тогда $r_{yx_2} = b_2 \cdot \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = \beta_2$ и d_{x_i} будет иметь ясный смысл коэффициента детерминации ($d_{x_i} = r^2_{yx_i}$).

В противном случае, когда x_1 и x_2 зависимы, интерпретация d_{x_i} как коэффициента детерминации осложняется.

Что же касается Q-коэффициента, то раскрывая смысл составляющих его мультипликативных сомножителей, можно записать

$$Q = b_i \cdot \frac{\overline{x}_i}{\overline{y}} \cdot \frac{\sigma_i}{\overline{x}_i} \quad \text{или}$$

$$Q = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_i} \cdot \frac{\sigma_i}{\overline{y}} = \left(\frac{\Delta y}{\sigma_y} \Big/ \frac{\Delta x_i}{\sigma_i} \right) \cdot \frac{\sigma_y}{\overline{y}},$$

$$Q = \frac{\Delta y}{\overline{y}} \Big/ \frac{\Delta x_i}{\sigma_i}, \qquad (21)$$

где Δx_i, Δy имеют тот же смысл, что и в вышеприведенных рассуждениях.

Таким образом, трактовка Q-коэффициента несет в себе следующее содержание: на сколько процентов изменится результативный показатель y по отношению к среднему уровню , если отклонение $(x_i - \overline{x}_i)$ увеличится на 1% по отношению к среднему квадратическому отклонению σ_i. Такое истолкование смысла Q-коэффициента представляется как некорректное междометье $Э_{yx_i}$ и β_i: числитель выражения (21) относится к эластичности результативного показателя (первая часть трактовки $Э_{yx_i}$), а знаменатель - к эластичности y по вариации - нечто не поддающееся ясному описанию (зависимость интенсивности изменения результативного показателя от вариации признака x_i).

---

[1] См.: *Аллен Р.* Математическая экономия. М., 1963; *Тинбэрхэн Я., Бос Х.* Математические модели экономического роста. М., 1967; *Вальтух К.К.* Определение оптимального соотношения между потреблением и производственным накоплением. Проблемы моделирования народного хозяйства / Под ред. К.А. Багриновского и др. Новосибирск, 1970. Ч. 1.

[2] Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. М., 2001. С. 197.

[5] *Елисеева И.И., Юзбашев М.М.* Общая теория статистики. М., 1995. С. 198.

[3] Курс социально-экономической статистики / Под ред. М.Г. Назарова. М., 2000. С. 87-88.

[4] См.: Практикум по эконометрике / Под ред. чл.-кор. Рос. Акад. наук И.И. Елисеевой. М., 2002. С. 58; Теория статистики / Под ред. проф. Р.А. Шмойловой. М., 1999. С. 291, 295; Теория статистики... С. 296-298.